

UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Faculté des sciences appliquées

Département de génie mécanique

VIBRATIONS LIBRES D'UNE STRUCTURE ÉLASTIQUE DANS UN  
FLUIDE LOURD

Mémoire de maîtrise es sciences appliquées

Spécialité: génie mécanique

Annie LUSSIER

Sherbrooke (Québec), Canada

mars 1998

# RÉSUMÉ

Les logiciels d'éléments finis commerciaux permettent une analyse dynamique «in vacuo» des structures. Mais dans le cas des turbines hydrauliques, cette analyse n'est pas suffisante puisque la structure opère dans l'eau. Il est donc souhaitable de disposer d'une méthode qui permet de tenir compte facilement de la présence du fluide.

Ce travail porte sur l'évaluation de l'effet du fluide sur les vibrations libres d'une structure élastique. En considérant le fluide comme incompressible, cet effet se réduit à un effet de masse ajoutée.

La formulation utilisée est basée sur une représentation par éléments finis pour la structure. Pour le fluide, ce travail utilise une formulation intégrale indirecte dans le cas d'une structure mince et une représentation intégrale directe en pression dans le cas plus général d'une structure quelconque. Dans les deux cas, la matrice de masse ajoutée obtenue est symétrique. Le calcul des fréquences et des modes de la structure immergée dans le fluide est effectué en projetant l'équation aux valeurs propres sur la base modale de la structure «in vacuo».

Un logiciel a été développé afin de permettre l'évaluation de la matrice de masse ajoutée et le calcul des fréquences et des modes couplés. Ce logiciel a été validé à l'aide de différents résultats tirés de la littérature.

Finalement, le logiciel a été utilisé pour le calcul de l'influence du fluide sur les vibrations libres d'une turbine hydraulique. Les résultats de ce calcul sont présentés.

# REMERCIEMENT

J'aimerais remercier Henri Pastorel, ainsi que mes directeurs de recherche Nouredine Atalla et Yvan Champoux pour leur support et leurs conseils tout au long de ce projet. Je voudrais également remercier tous les membres de l'équipe du projet MATH pour leur aide et leur encouragement. Finalement, je remercie mes proches, et tout particulièrement Stefan, pour leur soutien.

Ce travail a été rendu possible grâce au financement du Centre de Recherche d'Hydro-Québec.

# TABLE DES MATIÈRES

<b>CHAPITRE 1 -INTRODUCTION</b>	<b>1</b>
1.1 - Exposé de la problématique	1
1.1.1 - Problématique technologique	1
1.1.2 - Problématique scientifique	1
1.2 - Objectifs	3
1.2.1 - Objectif général	3
1.2.2 - Objectifs spécifiques	3
1.3 - Synthèse	3
<b>CHAPITRE 2 -ÉTAT DES CONNAISSANCES</b>	<b>4</b>
2.1 - Formulation par éléments finis	4
2.2 - Formulation par équations intégrales	5
2.2.1 - Méthodes directes	6
2.2.2 - Méthodes indirectes	7
2.2.3 - Formulations variationnelles	9
2.2.4 - Problème d'unicité de la solution	10
2.2.5 - Régularisation des intégrales	11
2.2.6 - Évaluation numérique des intégrales	12
2.3 - Synthèse	12
<b>CHAPITRE 3 -FORMULATION MATHÉMATIQUE DU PROBLÈME</b>	<b>14</b>
3.1 - Description du problème	14
3.1.1 - Hypothèses	14
3.1.2 - Équations du problème	15
3.2 - Formulation variationnelle pour la structure: méthode de Galerkin	15
3.3 - Formulation intégrale en potentiel de double couche pour le fluide	16
3.3.1 - Cas particulier: structure mince	18
3.3.2 - Cas général	21
3.4 - Formulation intégrale en fonction de la pression pour le fluide	22
3.4.1 - Cas particulier: surface régulière	23
3.5 - Méthode de calcul des modes et des fréquences propres couplés	26
3.6 - Synthèse	27

<b>CHAPITRE 4 - MISE EN OEUVRE NUMÉRIQUE</b>	<b>28</b>
4.1 - Implantation de la méthode numérique	28
4.1.1 - Matrice Do	28
4.1.2 - Matrice C1	31
4.1.3 - Matrice C2	32
4.1.4 - Matrice Mo	33
4.2 - Moyens mis en oeuvre	34
4.3 - Programme	36
4.3.1 - Fonctionnement général	36
4.3.2 - Hypothèses et limitations	39
4.3.3 - Autres programmes	40
4.3.4 - Intégration numérique	41
4.3.5 - Fonctionnement de l'interface avec Nastran	41
4.4 - Synthèse	42
<b>CHAPITRE 5 - VALIDATIONS</b>	<b>43</b>
5.1 - Plaque libre	43
5.1.1 - Description	43
5.1.2 - Résultats utilisés pour la comparaison	44
5.1.3 - Résultats et commentaires	45
5.2 - Cylindre simplement supporté aux extrémités	45
5.2.1 - Description	45
5.2.2 - Résultats utilisés pour la comparaison	47
5.2.3 - Résultats et commentaires	47
5.3 - Poutre encastree	48
5.3.1 - Description	48
5.3.2 - Résultats utilisés pour la comparaison	49
5.3.3 - Résultats et commentaires	49
5.4 - Sphère libre	50
5.4.1 - Description	50
5.4.2 - Résultats utilisés pour la comparaison	51
5.4.3 - Résultats et commentaires	51
5.5 - Avant-directrices de Brisay	52
5.5.1 - Description	52
5.5.2 - Résultats utilisés pour la comparaison	54
5.5.3 - Résultats et commentaires	54

5.6 - Avant-directrice de Limestone	56
5.6.1 - Description	56
5.6.2 - Résultats utilisés pour la comparaison	57
5.6.3 - Résultats et commentaires	57
5.7 - Synthèse	58
<b>CHAPITRE 6 -COUPLAGE ENTRE PLUSIEURS STRUCTURES</b>	<b>59</b>
6.1 - Formulation mathématique	59
6.2 - Description de la méthode	61
6.3 - Validation	61
6.3.1 - Formulation indirecte	62
6.3.2 - Formulation directe	63
6.4 - Interaction entre plusieurs plaques	63
6.5 - Effet du confinement	66
6.6 - Synthèse	67
<b>CHAPITRE 7 -APPLICATION À UNE TURBINE HYDRAULIQUE</b>	<b>68</b>
7.1 - Description	68
7.2 - Problématique	68
7.3 - Modélisation	69
7.4 - Résultats	70
7.4.1 - Modélisation d'une seule aube	70
7.4.2 - Modélisation des cinq aubes	71
7.4.3 - Roue encastrée	71
7.4.4 - Modèle complet	73
<b>CONCLUSION</b>	<b>75</b>
<b>ANNEXE A - INTERFACE AVEC MSC/XL</b>	<b>77</b>
A.1 - Visualisation du maillage de surface	77
A.2 - Visualisation des modes couplés	77
<b>ANNEXE B - UTILISATION DES PROGRAMMES</b>	<b>79</b>

B.1 - ADDMASS	79
B.2 - BEM2DAT	80
B.3 - BEMCPLG	80
B.4 - PREBEM	81
B.5 - WETFREQ	82
<b>ANNEXE C - FORMAT DES FICHIERS</b>	<b>84</b>
C.1 - Fichier de données de Nastran	84
C.2 - Fichiers créés par «prebem»	84
C.3 - Fichiers de sortie de «wetfreq»	87
C.4 - Fichiers contenant les valeurs de contrôle	88
<b>ANNEXE D - VECTEURS PROPRES EN COORDONNÉES MODALES</b>	<b>90</b>
D.1 - Roue encastrée	90
D.2 - Modèle complet	91
<b>BIBLIOGRAPHIE</b>	<b>94</b>

## LISTE DES FIGURES

Figure 1.1 - Géométrie du problème	2
Figure 3.1 - Géométrie du problème	14
Figure 3.2 - Structure mince	18
Figure 4.1 - Fonctionnement du programme	37
Figure 4.2 - Procédure à suivre	42
Figure 5.1 - Plaque libre	43
Figure 5.2 - Plaque libre - déformées modales	44
Figure 5.3 - Cylindre simplement supporté	47
Figure 5.4 - Cylindre simplement supporté - déformées modales	47
Figure 5.5 - Poutre encastrée	48
Figure 5.6 - Poutre encastrée - déformées modales	49
Figure 5.7 - Sphère libre	51
Figure 5.8 - Sphère libre - déformées modales	53
Figure 5.9 - Avant-directrices de Brisay	54
Figure 5.10 - Avant-directrices de Brisay - déformées modales	55
Figure 5.11 - Avant-directrice de Limestone	56
Figure 5.12 - Avant-directrice de Limestone - déformées modales	57
Figure 6.1 - Géométrie du problème de couplage	59
Figure 6.2 - Schéma des plaques	62
Figure 6.3 - Couplage entre deux plaques - allure du premier mode	64
Figure 6.4 - Couplage entre deux plaques - variation des fréquences en fonction de la distance entre les plaques	64



Figure 6.5 -	Couplage entre plusieurs plaques - variation des fréquences en fonction de la distance entre les plaques _____	65
Figure 6.6 -	Ensemble de trois plaques - allure du premier mode _____	66
Figure 6.7 -	Variation des fréquences de la plaque en fonction de la distance entre la plaque et les murs _____	67
Figure 7.1 -	Roue d'une turbine hydraulique _____	68
Figure 7.2 -	Maillage de la roue _____	69
Figure 7.3 -	Aube encastrée _____	70
Figure 7.4 -	Cinq aubes encastrées _____	71
Figure B.1 -	Menu de «wetfreq» _____	83

## LISTE DES TABLEAUX

TABLEAU 5.1. - Plaque libre - comparaison des fréquences	46
TABLEAU 5.2. - Cylindre simplement supporté - comparaison des fréquences	48
TABLEAU 5.3. - Poutre encastrée - comparaison des fréquences (modes 1 à 3)	50
TABLEAU 5.4. - Poutre encastrée - comparaison des fréquences (modes 4 à 8)	50
TABLEAU 5.5. - Sphère libre - comparaison des fréquences	52
TABLEAU 5.6. - Avant-directrices de Brisay - comparaison des fréquences naturelles (premier mode)	55
TABLEAU 5.7. - Avant-directrices de Brisay - influence de la masse ajoutée	56
TABLEAU 5.8. - Avant-directrice de Limestone - comparaison des fréquences naturelles (premier mode)	58
TABLEAU 6.1 - Formulation indirecte - comparaison des fréquences couplées	62
TABLEAU 6.2 - Formulation directe - comparaison des fréquences couplées	63
TABLEAU 7.1 - Aube encastrée - influence du fluide	70
TABLEAU 7.2 - Cinq aubes encastrées - influence du fluide	71
TABLEAU 7.3 - Roue encastrée - influence du fluide	72
TABLEAU 7.4 - Roue encastrée - comparaison des deux méthodes	73
TABLEAU 7.5 - Modèle complet - influence du fluide	74

# CHAPITRE 1 - INTRODUCTION

## 1.1 Exposé de la problématique

Ce projet de recherche porte sur les vibrations libres d'une structure élastique immergée dans un fluide lourd. En particulier, on s'intéresse à l'effet de la masse ajoutée par l'eau sur les vibrations libres d'une turbine hydraulique.

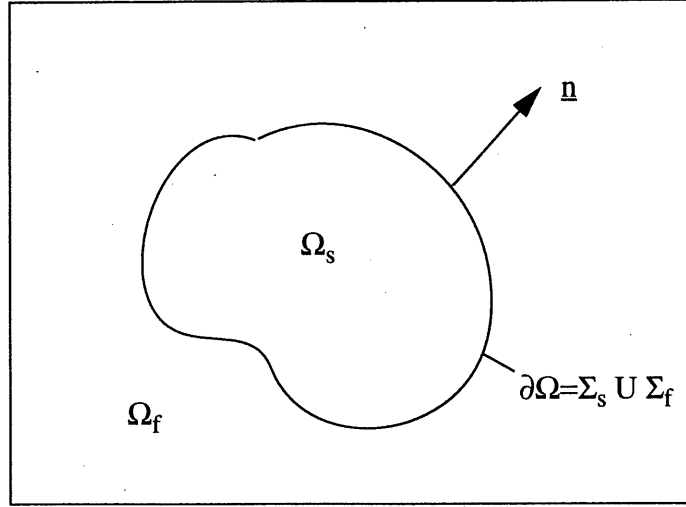
### 1.1.1 Problématique technologique

Dans le cadre du projet MATH (Modèles d'analyse des turbines hydrauliques), les chercheurs du centre de recherche d'Hydro-Québec (IREQ) s'intéressent aux vibrations des turbines hydrauliques. En particulier, un modèle d'une roue de type Kaplan a été développé afin de permettre une analyse dynamique complète «in vacuo» avec les logiciels commerciaux Nastran et Ideas. Le but visé est de déterminer s'il peut y avoir coïncidence entre les fréquences de résonance de la turbine et une excitation connue, ce qui pourrait entraîner une fissuration prématurée ou encore une fatigue accrue. Mais afin d'atteindre ce but, les fréquences naturelles de la turbine doivent être connues avec précision. Or, comme la turbine opère dans l'eau, il devient important de modifier le modèle pour tenir compte de la présence du fluide.

### 1.1.2 Problématique scientifique

La présence du fluide autour de la structure engendre une force de réaction qui peut être interprétée comme une contribution de masse ajoutée et d'amortissement. Cependant, lorsque le fluide en question peut être considéré comme incompressible, le terme d'amortissement disparaît pour un fluide au repos. La présence de l'eau engendre alors uniquement une contribution de masse ajoutée.

Lors de la modélisation du problème, on considère que la turbine est une structure élastique linéaire (domaine  $\Omega_s$ ) et qu'elle est immergée dans un fluide non borné (domaine  $\Omega_f$ ) supposé parfait, homogène et incompressible. La frontière entre la structure et le fluide est notée  $\Sigma_f$ .



**Figure 1.1 Géométrie du problème**

Un tel problème est gouverné par les équations suivantes:

$$\text{div } \underline{\underline{\sigma}} + \rho_s \omega^2 \underline{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega_s \quad (1-1)$$

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{F} \quad \text{sur } \Sigma_s \quad (1-2)$$

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = -P \underline{n} \quad \text{sur } \Sigma_f \quad (1-3)$$

$$\Delta P = 0 \quad \text{dans } \Omega_f \quad (1-4)$$

$$\frac{\partial P}{\partial n} = \rho_f \omega^2 (\underline{u} \cdot \underline{n}) \quad \text{sur } \Sigma_f \quad (1-5)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \frac{\partial P}{\partial r} \right) = 0 \quad (1-6)$$

L'équation (1-1) est l'équation de l'élastodynamique linéaire qui gouverne les vibrations de la structure. Les équations (1-2) et (1-3) représentent les efforts sur la structure, soit les forces externes et les forces de pression du fluide. L'équation (1-4) est l'équation de Laplace qui gouverne le domaine fluide. Dans le cas d'un fluide compressible, cette équation doit être remplacée par l'équation de Helmholtz. L'équation (1-5) est la condition limite de Neumann qui spécifie la continuité des déplacements à l'interface et l'équation (1-6) est la condition de décroissance à l'infini (Sommerfeld).

## 1.2 Objectifs

### 1.2.1 Objectif général

L'objectif principal de ce projet est le développement et l'implantation d'une méthode permettant le calcul des fréquences et des modes propres d'une structure complexe immergée dans un fluide lourd.

### 1.2.2 Objectifs spécifiques

Les objectifs spécifiques sont:

#### 1. Calcul de la matrice de masse ajoutée dans le cas d'une structure mince

Développement de la formulation et implantation numérique dans le cas d'éléments finis quadrangles et triangulaires

Validation des résultats par comparaison avec la littérature

Validation des résultats par comparaison avec des résultats expérimentaux

#### 2. Calcul de la matrice de masse ajoutée dans le cas d'une structure quelconque

Développement de la formulation

Implantation numérique dans les cas d'éléments finis quadrangles et triangulaires

Validation des résultats

#### 3. Implantation d'une interface avec Nastran

#### 4. Application industrielle

Calcul des fréquences et des modes couplés d'une roue de turbine hydraulique

## 1.3 Synthèse

Dans ce chapitre, nous avons énoncé la problématique rencontrée à l'IREQ, ainsi que les équations de base gouvernant un tel problème. Nous avons également défini les objectifs de ce projet. Avant de présenter le travail réalisé, nous allons, au chapitre suivant, exposer les différentes méthodes proposées dans la littérature pour résoudre les problèmes de couplage entre un fluide et une structure.

## CHAPITRE 2 - ÉTAT DES CONNAISSANCES<sup>1</sup>

En général, la modélisation de la structure se fait par une formulation variationnelle de l'équation de l'élastodynamique (Bathe, 1982). Pour le problème décrit par les équations (1-1), (1-2) et (1-3), on obtient une équation de la forme

$$\int_{\Omega_s} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{u}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) d\Omega - \omega^2 \int_{\Omega_s} \rho_s \underline{u} \delta \underline{u} d\Omega + \int_{\Sigma_f} \underline{P} \underline{n} \cdot \delta \underline{u} dS = \int_{\Sigma_s} \underline{F} \cdot \delta \underline{u} dS \quad (2-1)$$

Après discrétisation par éléments finis, cette équation devient

$$([K] - \omega^2 [M]) \{u\} + [C] \{P\} = \{F\} \quad (2-2)$$

où  $[K]$  représente la matrice de rigidité de la structure,  
 $[M]$  sa matrice de masse,  
 $[C]$  la matrice de couplage entre le fluide et la structure,  
 $\{F\}$  le vecteur des forces externes et  
 $\underline{n}$  la normale sortante au solide.

Ce qui distingue les différentes méthodes d'analyse du problème de couplage fluide-structure entre elles est la façon dont le fluide est modélisé. On peut regrouper ces approches en deux catégories: la formulation par éléments finis et la formulation par équations intégrales.

### 2.1 Formulation par éléments finis

La méthode des éléments finis est utilisée depuis longtemps pour modéliser les problèmes de couplage intérieur (Gladwell, 1966). Elle présente de nombreux avantages puisqu'elle permet d'obtenir des matrices bandes, symétriques et indépendantes de la fréquence. Le système couplé obtenu n'est toutefois pas toujours symétrique. La formulation utilisée est généralement une formulation variationnelle.

Partons d'une formulation variationnelle de l'équation de Helmholtz:

---

1. À moins d'indication contraire, les équations présentées dans ce chapitre correspondent au cas général d'un fluide compressible.

$$\int_{\Omega_f} \nabla P \cdot \nabla \delta P d\Omega - \omega^2 \int_{\Omega_f} \frac{1}{2} P \delta P d\Omega + \rho_f \omega^2 \int_{\Sigma_f} \underline{u} \cdot \underline{n} \delta P dS = 0 \quad (2-3)$$

Après discrétisation et couplage avec l'équation (2-2), on obtient:

$$\begin{bmatrix} K - \omega^2 M & C \\ \omega^2 C^t & H - \omega^2 Q \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2-4)$$

Le problème aux valeurs propres est non-symétrique. Notons cependant que des techniques de symétrisation ont été développées et testées avec succès (Irons, 1970; Atalla, 1997b).

Mais cette méthode est mal adaptée à l'analyse des problèmes de couplage extérieur. La nécessité de modéliser le fluide entraîne rapidement des systèmes de taille importante. De plus, l'imposition de la condition à l'infini présente des difficultés. Différentes solutions ont toutefois été proposées pour faciliter l'imposition de cette condition.

Zienkiewicz (Zienkiewicz et al., 1977) a fait une revue des différentes méthodes possibles. Parmi celles-ci, on retrouve entre autres l'imposition de la condition de rayonnement de manière approximative à une distance finie de la structure. Il y a également l'utilisation d'éléments infinis qui satisfont la condition de rayonnement par le choix de leur fonctions d'interpolation (Bettess, 1977; Ungless, 1973) ou par imposition d'une condition d'absorption sur une frontière artificielle, empêchant ainsi les réflexions et simulant un domaine infini (Bayliss, 1979; Zienkiewicz et Newton, 1969). Mais malgré les solutions proposées, à ce jour, la méthode des éléments finis demeure mal adaptée aux problèmes de couplage extérieur.

## 2.2 Formulation par équations intégrales

Contrairement aux éléments finis, les méthodes intégrales sont particulièrement bien adaptées aux problèmes de rayonnement extérieur puisque la condition à l'infini est implicitement vérifiée par la formulation. De plus, la dimensionalité du problème est réduite de un. Cependant, les matrices obtenues par ces méthodes sont en général pleines, non symétriques et dépendent de la fréquence.

Cette gamme de méthodes se divise en deux groupes: les méthodes directes (Chen, 1963; Chertock, 1964) et les méthodes indirectes (Filippi, 1977; Giroire, 1978).

### 2.2.1 Méthodes directes

Les méthodes directes sont basées sur l'utilisation de la représentation intégrale de Kirchhoff (Atalla, 1997a):

$$C(\underline{x})P(\underline{x}) = \int_{\Sigma_f} \left[ P(\underline{y}) \frac{\partial G(\underline{x}, \underline{y})}{\partial n_y} - \frac{\partial P(\underline{y})}{\partial n_y} G(\underline{x}, \underline{y}) \right] dS_y \quad (2-5)$$

où • G est la fonction de Green donnée par  $G(\underline{x}, \underline{y}) = \frac{e^{-jkr}}{4\pi r}$  (2-6)

avec  $r = |\underline{y} - \underline{x}|$  la distance euclidienne entre les points  $\underline{x}$  et  $\underline{y}$ , (2-7)

- $\underline{y}$  est un point de la surface  $\Sigma_f$ ,
- $\underline{n}_y$  est la normale extérieure au point  $\underline{y}$ ,

et, •  $C(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & \underline{x} \in \Omega_f \\ \frac{1}{2} & \underline{x} \in \Sigma_f \text{ (cas d'une surface régulière)} \\ 0 & \underline{x} \in \Omega_s \end{cases}$  (2-8)

Utilisant la condition limite de Neumann (équation 1-5), cette équation s'écrit

$$\frac{1}{2} \frac{\partial P(\underline{x})}{\partial n_x} = \frac{1}{2} \rho_f \omega^2 \underline{u}(\underline{x}) \cdot \underline{n}_x \quad (2-9)$$

$$= PF \int_{\Sigma_f} \left[ P(\underline{y}) \frac{\partial^2 G(\underline{x}, \underline{y})}{\partial n_x \partial n_y} \right] dS_y - \int_{\Sigma_f} \left[ \rho_f \omega^2 \underline{u}(\underline{y}) \cdot \underline{n}_y \frac{\partial G(\underline{x}, \underline{y})}{\partial n_x} \right] dS_y$$

où PF indique que l'intégrale doit être considérée dans le sens de la partie finie de Hadamard.

Cette équation doit être discrétisée par la méthode de collocation, c'est-à-dire qu'après avoir réalisé l'interpolation des variables, on impose que l'équation soit vérifiée exactement



en un nombre donné de points de collocation. En général, on utilise les mêmes points pour l'interpolation et la collocation. On aboutit à un système de la forme

$$\rho_f \omega^2 [B] \{u\} = [D(k)] \{P\} \quad (2-10)$$

On peut ensuite combiner cette équation avec l'équation de la structure (équation 2-2) pour obtenir le système couplé.

$$\begin{bmatrix} K - \omega^2 M & C \\ -\rho_f \omega^2 B & D(k) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2-11)$$

La solution du système couplé peut être obtenue de différentes façons. La première méthode consiste à résoudre directement le système couplé. La taille du système obtenu est cependant importante et les matrices dépendent de la fréquence.

La seconde méthode consiste à éliminer la variable fluide. Dans le cas d'un fluide incompressible ( $k=0$ ), on peut exprimer l'effet du fluide par une matrice de masse ajoutée. Cette méthode nécessite toutefois l'inversion d'une matrice. En utilisant cette méthode, après l'élimination de la pression, on obtient le système suivant:

$$[[K] - \omega^2 ([M] + [M_a])] \{u\} = \{F\} \quad (2-12)$$

$$\text{avec} \quad [M_a] = \rho_f [C] [D(0)]^{-1} [B] \quad (2-13)$$

la matrice de masse ajoutée dans le cas d'un fluide incompressible.

On peut voir que la matrice de masse obtenue avec cette formulation n'est pas symétrique, ce qui présente un inconvénient au niveau de la résolution numérique du système. De plus, l'évaluation de la matrice  $D(0)$  implique l'évaluation d'une intégrale hypersingulière.

### 2.2.2 Méthodes indirectes

Les méthodes indirectes sont basées quant à elles sur l'utilisation d'une représentation intégrale en fonction de potentiels de simple et double couches. Le potentiel de simple couche est utilisé pour représenter les problèmes de type Dirichlet, alors que le potentiel de dou-

ble couche est utilisé pour les problèmes de Neumann. Pour les problèmes avec des conditions limites mixtes, on utilise une combinaison des deux représentations (Atalla, 1997a):

$$P(\underline{x}) = \int_{\Sigma_f} \left( \mu(\underline{y}) \frac{\partial G(\underline{x}, \underline{y})}{\partial n_y} - \sigma(\underline{y}) G(\underline{x}, \underline{y}) \right) dS_y \quad (2-14)$$

où  $\sigma$  représente le potentiel de simple couche et  $\mu$  le potentiel de double couche.

Dans le cas d'une structure mince en contact avec le fluide sur ces deux faces,  $\mu$  peut être interprété comme le saut de pression à travers la surface et  $\sigma$  comme le saut de sa dérivée normale.

De façon similaire à ce qui a été fait pour la méthode directe, l'équation (2-14)<sup>1</sup> peut être utilisée dans la formulation de la condition limite de Neumann (équation 1-5):

$$\frac{\partial P(\underline{x})}{\partial n_x} = \rho_f \omega^2 \underline{u}(\underline{x}) \cdot \underline{n}_x = PF \int_{\Sigma_f} \left[ \mu(\underline{y}) \frac{\partial^2 G(\underline{x}, \underline{y})}{\partial n_x \partial n_y} \right] dS_y \quad (2-15)$$

En utilisant la technique de collocation, nous aboutissons à la forme discrétisée:

$$\rho_f \omega^2 [A] \{u\} + [B(k)] \{\mu\} = \{0\}$$

Et le système couplé s'écrit, après discrétisation:

$$\begin{bmatrix} K - \omega^2 M & C \\ \rho_f \omega^2 A & B(k) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \mu \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2-16)$$

Dans le cas d'un fluide incompressible, en éliminant le potentiel de double couche, on obtient la matrice de masse ajoutée:

$$[M_a] = \rho_f [C] [B(0)]^{-1} [A] \quad (2-17)$$

Encore un fois, la formulation conduit à une matrice de masse non symétrique, et on doit évaluer une intégrale hypersingulière.

---

1. Cas d'une représentation par un potentiel de double couche

### 2.2.3 Formulations variationnelles

Les deux méthodes précédentes conduisent à des systèmes d'équations couplés non-symétriques. Mais il est possible de les symétriser en utilisant une formulation variationnelle (Giroire et Nedelec, 1978; Hamdi, 1981; Pierce, 1983). Il suffit de multiplier l'équation par une fonction admissible et d'intégrer sur le domaine. L'équation obtenue est ensuite discrétisée normalement, sans utiliser la méthode de collocation.

La formulation variationnelle présente de nombreux avantages par rapport à la méthode de collocation. En effet, elle permet d'obtenir une précision accrue car les équations sont vérifiées en tous points du domaine alors qu'avec la collocation, elles ne sont vérifiées que pour les points de collocation. De plus, cette formulation permet de régulariser les intégrales singulières et d'obtenir un système couplé symétrique. Pour le cas d'une représentation indirecte (équation 2-15), on obtient (Atalla, 1997a):

$$\int_{\Sigma_f} \rho_f \omega^2 (\underline{u}(\underline{x}) \delta \mu(\underline{x})) dS_x = \int_{\Sigma_f} \int_{\Sigma_f} \left[ \mu(\underline{y}) \frac{\partial^2 G(\underline{x}, \underline{y})}{\partial n_x \partial n_y} \delta \mu(\underline{x}) \right] dS_y dS_x \quad (2-18)$$

Soit sous forme discrétisée:

$$\rho_f \omega^2 [C]^t \{u\} - [D(k)] \{\mu\} = \{0\}$$

Et le système couplé s'écrit, après discrétisation:

$$\begin{bmatrix} K - \omega^2 M & C \\ C^t & \frac{D(k)}{\rho_f \omega^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \mu \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2-19)$$

La matrice de masse ajoutée, pour un fluide incompressible, est donc donnée par:

$$[M_a] = \rho_f [C] [D(0)]^{-1} [C]^t \quad (2-20)$$

Cette fois-ci, la matrice de masse ajoutée est symétrique. Il est cependant à noter que cette formulation n'est valide que dans le cas d'une structure mince.

La matrice de masse ajoutée peut aussi être calculée avec la formulation variationnelle directe. On obtient:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Sigma_f} \underline{u}(\underline{x}) \cdot \underline{n}_x \delta P dS_x &= \frac{1}{\rho_f \omega^2} \int_{\Sigma_f} \int_{\Sigma_f} P(\underline{y}) \frac{\partial^2 G(\underline{x}, \underline{y})}{\partial n_x \partial n_y} \delta P dS_y dS_x \\ &\quad - \int_{\Sigma_f} \int_{\Sigma_f} \underline{u}(\underline{y}) \cdot \underline{n}_y \frac{\partial G(\underline{x}, \underline{y})}{\partial n_x} \delta P dS_y dS_x \end{aligned} \quad (2-21)$$

Soit sous forme discrétisée:

$$\frac{1}{2} \langle \delta P \rangle [C]^t \{u\} = \langle \delta P \rangle \frac{[D(k)]}{\rho_f \omega^2} \{P\} + \langle \delta P \rangle [C_2(k)]^t \{u\}$$

Et le système couplé s'écrit:

$$\begin{bmatrix} K - \omega^2 M & C \\ \frac{1}{2} C^t + C_2^t(k) & \frac{D(k)}{\rho_f \omega^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2-22)$$

$$[M_a] = \rho_f [C][D(0)]^{-1} \left[ \frac{1}{2} C^t + C_2^t(0) \right] \text{ pour le fluide incompressible.} \quad (2-23)$$

Nous montrerons à la section 3.4.1 que la matrice de masse ajoutée obtenue avec cette formulation peut être rendue symétrique après quelques manipulations.

## 2.2.4 Problème d'unicité de la solution

Dans le cas d'un fluide compressible, de nombreuses publications (Copley, 1968; Schenck, 1968) ont montré que ces différentes formulations intégrales présentent un problème important: aux fréquences critiques du problème intérieur associé, les différentes matrices deviennent singulières et la formulation ne permet plus d'obtenir une solution unique. Mais comme on s'intéresse uniquement au cas du fluide incompressible et que dans ce cas, le problème d'unicité ne survient pas, il suffit de mentionner qu'il existe des méthodes permettant de surmonter ces difficultés (Schenck, 1968; Burton & Miller, 1971; Jeans et Mathews, 1993).

### 2.2.5 Régularisation des intégrales

Lorsque le point  $\underline{x}$  tend vers le point  $\underline{y}$ , la distance  $r$  tend vers zéro et la fonction  $G$  et ses dérivées sont singulières. Mais on peut démontrer que les différentes intégrales impliquant  $G$  et sa première dérivée ne sont que faiblement singulières. Elles peuvent donc être évaluées sans problème à l'aide d'une procédure appropriée (voir section 2.2.6). Cependant, dans le cas des formulations directes et indirectes, le terme impliquant la dérivée seconde de  $G$  est hypersingulier. Il doit donc être évalué au sens de la partie finie de Hadamard. Plusieurs méthodes ont été développées afin d'éviter cette évaluation. Elles permettent de transformer le terme hypersingulier en un terme faiblement singulier pouvant être évalué plus facilement.

L'approche la plus couramment utilisée a été proposée par Stallybrass (Stallybrass, 1967). Elle est basée sur la transformation suivante:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_f} P(\underline{y}) \frac{\partial^2 G(\underline{x}, \underline{y})}{\partial n_x \partial n_y} dS_y &= \int_{\Sigma_f} P(\underline{y}) (\underline{n}_x \cdot \underline{n}_y) k^2 G(\underline{x}, \underline{y}) dS_y \\ &\quad - \int_{\Sigma_f} ([\underline{n}_y \times \underline{\nabla}_y P(\underline{y})] \cdot [\underline{n}_x \times \underline{\nabla}_x G(\underline{x}, \underline{y})]) dS_y \end{aligned} \quad (2-24)$$

Notons qu'après cette transformation, le terme impliquant la seconde dérivée de  $G$  est faiblement singulier, mais son évaluation numérique directe demeure délicate. En particulier, il faut évaluer les dérivées tangentielles sur la surface.

Hamdi (1981) a proposé une méthode, similaire à celle de Stallybrass, afin de régulariser les intégrales dans le cas d'une formulation variationnelle:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_f} \int_{\Sigma_f} \mu(\underline{x}) \mu(\underline{y}) \frac{\partial^2 G(\underline{x}, \underline{y})}{\partial n_x \partial n_y} dS_y dS_x & \\ = \int_{\Sigma_f} \int_{\Sigma_f} k^2 \mu(\underline{x}) \mu(\underline{y}) (\underline{n}_x \cdot \underline{n}_y) G(\underline{x}, \underline{y}) dS_y dS_x & \\ - \int_{\Sigma_f} \int_{\Sigma_f} ([\underline{n}_x \times \underline{\nabla}_x \mu(\underline{x})] \cdot [\underline{n}_y \times \underline{\nabla}_y \mu(\underline{y})]) G(\underline{x}, \underline{y}) dS_y dS_x & \end{aligned} \quad (2-25)$$

Encore une fois, cette transformation nécessite l'évaluation de dérivées tangentielles.

### 2.2.6 Évaluation numérique des intégrales

L'évaluation des intégrales régulières ne pose aucun problème. Les intégrales sont tout simplement évaluées par la méthode de Gauss.

L'évaluation des intégrales faiblement singulières demande plus d'attention. Mais elle peut être réalisée sans problème avec des techniques appropriées. Ces techniques sont nombreuses, mais nous n'en mentionnerons que deux. La plus couramment utilisée est celle de Lachat et Watson (1976). Elle implique une transformation en coordonnées polaires et une subdivision des éléments de référence. Une autre méthode a été proposée par Wang et Atalla (1997). Elle est valide uniquement dans le cas d'éléments quadrangles. Elle utilise un système de points et de poids d'intégration, avec la singularité en  $1/r$  incluse dans les poids.

## 2.3 Synthèse

En résumé, on a vu que quelque soit la méthode utilisée, la structure est généralement modélisée par éléments finis. La différence entre les méthodes se situe donc au niveau de la modélisation du fluide. Pour ce dernier, les approches peuvent être divisées en deux catégories: la formulation par éléments finis et la formulation par équations intégrales.

La formulation par éléments finis permet d'obtenir des matrices bandes, symétriques et indépendantes de la fréquence. Cependant, le domaine fluide doit être modélisé dans son ensemble. De plus, l'imposition de la condition à l'infini pose des difficultés.

La formulation par équations intégrales est plus avantageuse pour les problèmes extérieurs puisque la condition à l'infini est implicitement satisfaite par la formulation. Mais les matrices obtenues sont en général pleines et dépendent de la fréquence. Cette gamme de méthodes peut à nouveau être subdivisée en plusieurs catégories. Les deux premières, les formulations directes et indirectes, conduisent à des systèmes non-symétriques. De plus, on doit évaluer une intégrale hypersingulière. Les deux dernières, les formulations variation-

nelles, permettent de régulariser les intégrales singulières. De plus, elles sont plus précises que les formulations directes et indirectes puisque les équations sont satisfaites en tous points du domaine et non seulement aux points de collocation. La formulation variationnelle indirecte conduit à un système symétrique, mais elle ne s'applique que dans le cas d'une structure mince. Quant à la formulation variationnelle directe, elle conduit à un système qui peut être rendu symétrique et n'impose aucune restriction sur la structure.

Après la revue des méthodes disponibles, il apparaît clairement que la méthode optimale pour traiter le problème qui nous intéresse est la formulation variationnelle directe. Elle a l'avantage de permettre de traiter des structures complexes, tout en conservant les avantages de la formulation variationnelle.

## CHAPITRE 3 - FORMULATION MATHÉMATIQUE DU PROBLÈME

Les différentes méthodes permettant l'évaluation de l'interaction entre une structure et un fluide ont été présentées au chapitre précédent. Nous allons maintenant énoncer les hypothèses nécessaires et montrer le développement mathématique de ces équations.

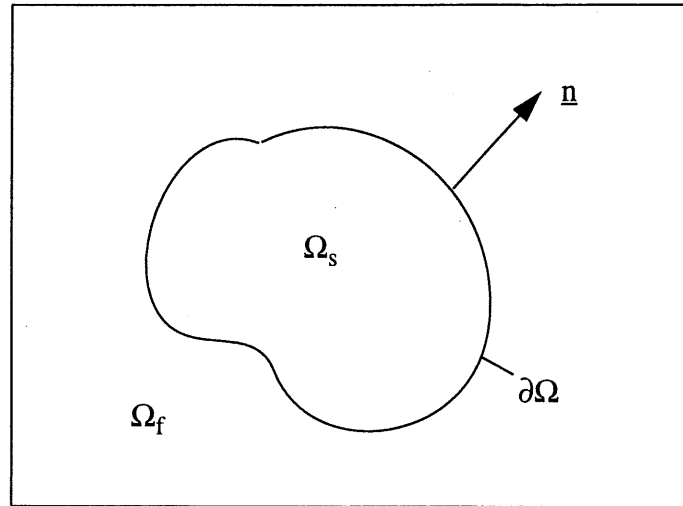


Figure 3.1 Géométrie du problème

### 3.1 Description du problème

#### 3.1.1 Hypothèses

On suppose que la turbine est une structure élastique linéaire (domaine  $\Omega_s$ ), et qu'elle est immergée dans un fluide non borné (domaine  $\Omega_f$ ). Ce fluide est supposé parfait, homogène et incompressible.

La surface de la structure est donnée par  $\partial\Omega = \Sigma_f + \Sigma_s$ , avec  $\Sigma_f$  la frontière entre la structure et le fluide.

On s'intéresse à la réponse harmonique ( $e^{j\omega t}$ ) du système. Plus particulièrement, on veut évaluer l'effet de la masse ajoutée par le fluide sur les vibrations libres de la structure.



### 3.1.2 Équations du problème

Pour la structure, on utilise le déplacement comme inconnue. Pour le fluide, on utilise la pression. Les équations régissant ce problème ont été données précédemment. Mais nous allons les rappeler ici:

$$\text{div} \underline{\underline{\sigma}} + \rho_s \omega^2 \underline{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega_s \quad (3-1)$$

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{F} \quad \text{sur } \Sigma_s \quad (3-2)$$

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = -P \underline{n} \quad \text{sur } \Sigma_f \quad (3-3)$$

$$\Delta P = 0 \quad \text{dans } \Omega_f \quad (3-4)$$

$$\frac{\partial P}{\partial n} = \rho_f \omega^2 (\underline{u} \cdot \underline{n}) \quad \text{sur } \Sigma_f \quad (3-5)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \frac{\partial P}{\partial r} \right) = 0 \quad (3-6)$$

### 3.2 Formulation variationnelle pour la structure: méthode de Galerkin

Comme on l'a vu au chapitre 2, la modélisation de la structure se fait par une formulation variationnelle. Cette formulation est obtenue de la manière suivante.

Soit  $\delta u$  une variation admissible de  $u$ .

En multipliant l'équation (3-1) par  $\delta u$ , en intégrant sur le domaine  $\Omega_s$  puis en utilisant la formule de Green, on obtient:

$$\int_{\Omega_s} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{u}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) d\Omega - \omega^2 \int_{\Omega_s} \rho_s \underline{u} \delta \underline{u} d\Omega - \int_{\partial\Omega} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} \delta \underline{u} dS = 0 \quad (3-7)$$

Puis, en utilisant les conditions limites de la structure (équations 3-2 et 3-3) dans cette équation, on obtient la formulation variationnelle du problème de réponse harmonique de la structure aux actions de pression du fluide:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_s} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{u}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) d\Omega - \omega^2 \int_{\Omega_s} \rho_s \underline{u} \delta \underline{u} d\Omega + \int_{\Sigma_f} \underline{P} \underline{n} \cdot \delta \underline{u} dS \\ = \int_{\Sigma_s} \underline{F} \cdot \delta \underline{u} dS \end{aligned} \quad (3-8)$$

$\forall \underline{u}$  et  $\delta \underline{u}$  admissibles

### 3.3 Formulation intégrale en potentiel de double couche pour le fluide

Soit  $\underline{y}$  un point de la frontière  $\Sigma_f$  et  $\underline{x}$  un point du domaine  $\Omega_f$ .

Comme on l'a mentionné à la section 2.2.2, on peut associer à l'équation (3-4) une formulation intégrale par potentiel de double couche  $\mu$ :

$$P(\underline{x}) = \int_{\Sigma_f} \mu(\underline{y}) \frac{\partial G_o(\underline{x}, \underline{y})}{\partial n_y} dS_y \quad \forall \underline{x} \in \Omega_f \quad (3-9)$$

où:

- $\mu(\underline{y})$  représente le saut de la pression à travers la frontière  $\Sigma_f$

- $G_o(\underline{x}, \underline{y}) = \frac{1}{4\pi r}$

C'est la solution élémentaire statique pour l'espace infini. Elle représente le champ créé par une source ponctuelle d'amplitude unité placée au point  $\underline{x}$ .

- $r = |\underline{y} - \underline{x}| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2}$

C'est la distance euclidienne entre le point  $\underline{y}$  et le point  $\underline{x}$ .

- $\frac{\partial G_o(\underline{x}, \underline{y})}{\partial n_y} = -\frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial r}{\partial n_y}$

C'est le flux associé à  $G_o(\underline{x}, \underline{y})$ .

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial n_y} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \underline{y}} \cdot \underline{n} = \frac{(\underline{y} - \underline{x})}{r} \cdot \underline{n}$$

C'est la dérivée normale de  $r$  au point  $\underline{y}$ .

Cette représentation intégrale (équation 3-9) peut ensuite être utilisée dans l'expression de la condition limite pour le fluide (Neumann, équation 3-5), pour obtenir la formulation intégrale indirecte.

$$\frac{\partial P(\underline{x})}{\partial n_x} = \frac{\partial}{\partial n_x} \left( \int_{\Sigma_f} \mu(\underline{y}) \frac{\partial G_o(\underline{x}, \underline{y})}{\partial n_y} dS_y \right) = \rho_f \omega^2 \underline{u}(\underline{x}) \cdot \underline{n}_x \quad (3-10)$$

Pour calculer la pression en tous points de  $\Omega_f$ , on doit évaluer l'intégrale sur la surface  $\Sigma_f$ . Mais cette intégrale est singulière. Pour éliminer cette singularité, nous allons associer une formulation variationnelle à l'équation (3-10).

Soit  $\delta\mu$  une variation admissible de  $\mu$ .

En multipliant l'équation (3-10) par  $\delta\mu(\underline{x})$  et en intégrant sur la surface  $\Sigma_f$ , nous obtenons la formulation intégrale variationnelle indirecte:

$$\int_{\Sigma_f} \int_{\Sigma_f} \mu(\underline{y}) \frac{\partial^2 G_o(\underline{x}, \underline{y})}{\partial n_x \partial n_y} \delta\mu(\underline{x}) dS_y dS_x = \int_{\Sigma_f} \rho_f \omega^2 \underline{u}(\underline{x}) \cdot \underline{n}_x \delta\mu(\underline{x}) dS_x \quad (3-11)$$

$\forall \mu$  et  $\delta\mu$  admissibles

Le terme de gauche de cette équation peut ensuite être régularisé en utilisant la transformation proposée par Hamdi (équation 2-25).

Jusqu'à présent, nous avons obtenu une équation pour la structure qui est fonction du déplacement  $\underline{u}$  de la structure et de la pression  $P$  du fluide, et une équation pour le fluide qui est fonction du déplacement  $\underline{u}$  de la structure et du potentiel de double couche  $\mu$ . Pour obtenir le système d'équations couplées, nous devons déterminer la relation entre la pression  $P$  et le potentiel de double couche  $\mu$ .

### 3.3.1 Cas particulier: structure mince

#### Relation entre P et $\mu$

Dans un premier temps, nous allons obtenir cette relation en supposant que la structure est mince et qu'elle est en contact avec le fluide sur ses deux faces (voir figure 3.2).

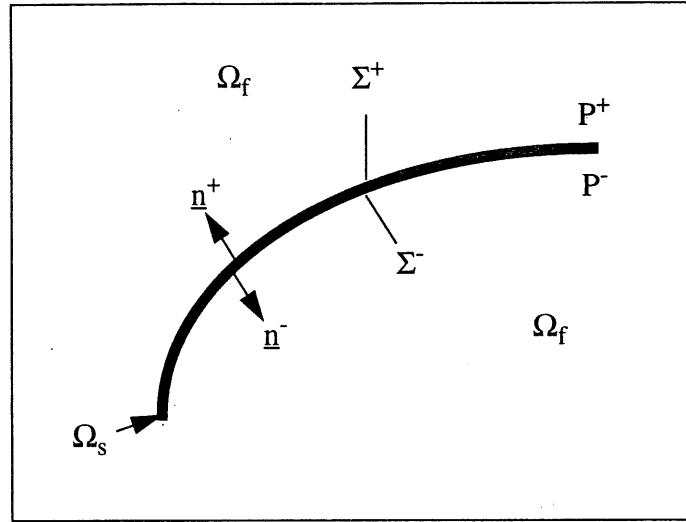


Figure 3.2 Structure mince

Nous pouvons diviser la surface  $\Sigma_f$  en deux faces,  $\Sigma^+$  et  $\Sigma^-$ . Nous notons par  $P^+$  et  $P^-$ , respectivement, la pression sur chacune de ces faces. Nous pouvons donc écrire:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_f} P \underline{n} \cdot \delta \underline{u} dS &= \int_{\Sigma^+} P^+ \underline{n}^+ \cdot \delta \underline{u} dS + \int_{\Sigma^-} P^- \underline{n}^- \cdot \delta \underline{u} dS \\ &= \int_{\Sigma^+ + \Sigma^-} (P^+ - P^-) \underline{n} \cdot \delta \underline{u} dS \\ &= \int_{\Sigma_f} \mu \underline{n} \cdot \delta \underline{u} dS \end{aligned} \quad (3-12)$$

où  $\underline{n} = \underline{n}^+ = -\underline{n}^-$

#### Discrétisation des équations

Le système couplé est donné par:

$$\int_{\Omega_s} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{u}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) d\Omega - \omega^2 \int_{\Omega_s} \rho_s \underline{u} \delta \underline{u} d\Omega + \int_{\Sigma_f} \underline{\mu} \underline{n} \cdot \delta \underline{u} dS \quad (3-13)$$

$$= \int_{\Sigma_s} \underline{F} \cdot \delta \underline{u} dS$$

$$\int_{\Sigma_f} \int_{\Sigma_f} \underline{\mu}(\underline{y}) \frac{\partial^2 G_o(\underline{x}, \underline{y})}{\partial n_x \partial n_y} \delta \underline{\mu}(\underline{x}) dS_y dS_x \quad (3-14)$$

$$- \rho_f \omega^2 \int_{\Sigma_f} \underline{u}(\underline{x}) \cdot \underline{n}_x \delta \underline{\mu}(\underline{x}) dS_x = 0$$

L'équation (3-13) est discrétisée par éléments finis alors que l'équation (3-14) est discrétisée par éléments finis de frontière.

Soit

$$\begin{aligned} \underline{u} &= N \hat{u} \\ \underline{p} &= \tilde{N} \hat{p} \\ \underline{\mu} &= \tilde{N} \hat{\mu} \end{aligned} \quad \text{les approximations nodales}$$

En utilisant ces approximations dans les équations (3-13) et (3-14), on obtient les vecteurs et matrices suivants:

$$\bullet \int_{\Omega_s} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{u}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) d\Omega \rightarrow \delta \hat{u}^t K \hat{u} \quad (3-15)$$

avec K la matrice de rigidité de la structure

$$\bullet \int_{\Omega_s} \rho_s \underline{u} \delta \underline{u} d\Omega \rightarrow \delta \hat{u}^t M \hat{u} \quad (3-16)$$

avec M la matrice de masse de la structure

$$\bullet \int_{\Sigma_f} \underline{\mu} \underline{n} \cdot \delta \underline{u} dS \rightarrow \delta \hat{u}^t C \hat{\mu} \quad (3-17)$$

avec C la matrice de couplage donnée par

$$C = \int_{\Sigma_f^e} N^t \tilde{N} dS \quad (3-18)$$

$$\bullet \int_{\Sigma_s} \underline{F} \cdot \delta \underline{u} dS \rightarrow \delta \hat{\underline{u}}^t \underline{F} \quad (3-19)$$

avec  $\underline{F}$  le vecteur force donné par

$$\underline{F} = \int_{\Sigma_f^e} \underline{N}^t \underline{F} dS \quad (3-20)$$

$$\bullet \int_{\Sigma_f} \underline{u}(\underline{x}) \cdot \underline{n}_x \delta \mu(\underline{x}) dS_x \rightarrow \delta \hat{\mu}^t \underline{C} \hat{\underline{u}} \quad (3-21)$$

avec  $\underline{C}$  donné par l'équation (3-18)

$$\bullet - \int_{\Sigma_f} \int_{\Sigma_f} \mu(\underline{y}) \frac{\partial^2 G_o(\underline{x}, \underline{y})}{\partial n_x \partial n_y} \delta \mu(\underline{x}) dS_y dS_x \rightarrow \delta \hat{\mu}^t \underline{D}_o \hat{\mu} \quad (3-22)$$

avec  $\underline{D}_o$  donné par la discrétisation de l'équation (2-25)

Le système d'équations (équations 3-13 et 3-14) devient donc, après invocation de la stationnarité:

$$\begin{bmatrix} \underline{K} - \omega^2 \underline{M} & \underline{C} \\ \underline{C}^t & \frac{\underline{D}_o}{\rho_f \omega^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\underline{u}} \\ \hat{\mu} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{F} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3-23)$$

On obtient finalement un système matriciel symétrique. Cependant, pour l'obtenir, nous avons dû supposer que la structure était mince. C'est une hypothèse très restrictive et qui ne s'applique pas au cas des turbines hydrauliques.

### Calcul de la masse ajoutée

On utilise la seconde équation de (3-23) pour éliminer la variable  $\mu$ :

$$\mu = -\rho_f \omega^2 (\underline{D}_o)^{-1} \underline{C}^t \underline{u} \quad (3-24)$$

En utilisant cette expression dans la première équation de (3-23), on obtient:

$$(K - \omega^2 M)u + C[-\rho_f C(D_o)^{-1} C^t]u = F \quad (3-25)$$

$$[K - \omega^2 (M + M_a)]u = F \quad (3-26)$$

$$\text{avec } M_a = \rho_f C(D_o)^{-1} C^t \quad (3-27)$$

C'est la matrice de masse ajoutée par le fluide.

### 3.3.2 Cas général

#### Relation entre P et $\mu$

Nous allons maintenant tenter d'obtenir une relation entre la pression P et le potentiel de double couche  $\mu$  sans émettre d'hypothèses concernant la structure.

À partir de la représentation intégrale indirecte sur la frontière  $\Sigma_f$ , on sait que (Atalla, 1997a):

$$P^+(\underline{x}) = \int_{\Sigma_f} \frac{\partial G_o(\underline{x}, \underline{y})}{\partial n_y} [\mu(\underline{y}) - \mu(\underline{x})] dS_y \quad (3-28)$$

On peut donc écrire:

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma_f} P(\underline{x}) \underline{n}_x \delta u(\underline{x}) dS_y \\ &= \int_{\Sigma_f} \int_{\Sigma_f} \frac{\partial G_o(\underline{x}, \underline{y})}{\partial n_y} [\mu(\underline{y}) - \mu(\underline{x})] \underline{n}_x \delta u(\underline{x}) dS_y dS_x \end{aligned} \quad (3-29)$$

La discrétisation de ce terme nous donne  $\delta \hat{u} \tilde{C} \hat{\mu}$ , avec

$$\tilde{C} = \int_{\Sigma_f} \int_{\Sigma_f} \frac{\partial G_o(\underline{\xi}, \underline{\eta})}{\partial n_y} [\tilde{N}(\underline{\eta}) - \tilde{N}(\underline{\xi})] \underline{n}_x dS_y dS_x \quad (3-30)$$

( $\underline{\xi}$  et  $\underline{\eta}$  sont les points des éléments de référence correspondant à  $\underline{x}$  et  $\underline{y}$ .)

On obtient le système couplé suivant:

$$\begin{bmatrix} K - \omega^2 M & \tilde{C} \\ C^t & \frac{D_o}{\rho_f \omega^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u} \\ \hat{p} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3-31)$$

Dans ce cas, **la formulation n'est pas symétrique**. Cela présente un inconvénient au niveau de la résolution numérique de ce système. Le temps de calcul est plus long et l'espace mémoire nécessaire est plus grand.

### Calcul de la masse ajoutée

De la même manière qu'à la section 3.3.1, on obtient:

$$[K - \omega^2 (M + M_a)]u = F \quad (3-32)$$

$$\text{avec } M_a = \rho_f \tilde{C} (D_o)^{-1} C^t \quad (3-33)$$

## 3.4 Formulation intégrale en fonction de la pression pour le fluide

Afin de rendre le problème symétrique, nous allons développer une formulation directe en pression.

Soit  $\underline{y}$  un point de la frontière  $\Sigma_f$  et  $\underline{x}$  un point du domaine  $\Omega_f$ .

La représentation intégrale de la pression dans le cas du problème extérieur nous permet d'écrire:

$$\begin{aligned} \forall \underline{x} \notin \Sigma_f: \quad P(\underline{x}) &= \int_{\Sigma_f} \left[ P(\underline{y}) \frac{\partial G_o(\underline{x}, \underline{y})}{\partial n_y} - G_o(\underline{x}, \underline{y}) \frac{\partial P(\underline{y})}{\partial n_y} \right] dS_y \\ &= \int_{\Sigma_f} P(\underline{y}) \frac{\partial G_o(\underline{x}, \underline{y})}{\partial n_y} dS_y - \rho_f \omega^2 \int_{\Sigma_f} \underline{u}(\underline{y}) \cdot \underline{n}_y G_o(\underline{x}, \underline{y}) dS_y \end{aligned} \quad (3-34)$$



$$\forall \underline{x} \in \Sigma_f: C^+(\underline{x})P(\underline{x}) = \int_{\Sigma_f^*} P(\underline{y}) \frac{\partial G_o(\underline{x}, \underline{y})}{\partial n_y} dS_y \quad (3-35)$$

$$- \rho_f \omega^2 \int_{\Sigma_f} \underline{u}(\underline{y}) \cdot \underline{n}_y G_o(\underline{x}, \underline{y}) dS_y$$

$$\text{avec } C^+(\underline{x}) = 1 + \int_{\Sigma_f^*} \frac{\partial G_o(\underline{x}, \underline{y})}{\partial n_y} dS_y \quad (3-36)$$

et  $\int_{\Sigma_f^*}$  représente la valeur principale de l'intégrale.

### 3.4.1 Cas particulier: surface régulière

Dans le cas d'une structure ayant une surface régulière, on peut démontrer (Atalla, 1997a) que  $C^+(\underline{x}) = 1/2$ .

À partir des équations (3-34) et (3-35), nous pouvons calculer le gradient de la pression:

$$\forall \underline{x} \notin \Sigma_f: \frac{\partial P(\underline{x})}{\partial n_x} = \int_{\Sigma_f} P(\underline{y}) \frac{\partial^2 G_o(\underline{x}, \underline{y})}{\partial n_x \partial n_y} dS_y \quad (3-37)$$

$$- \rho_f \omega^2 \int_{\Sigma_f} \underline{u}(\underline{y}) \cdot \underline{n}_y \frac{\partial G_o(\underline{x}, \underline{y})}{\partial n_x} dS_y$$

$$\forall \underline{x} \in \Sigma_f: \frac{1}{2} \frac{\partial P(\underline{x})}{\partial n_x} = PF \int_{\Sigma_f} P(\underline{y}) \frac{\partial^2 G_o(\underline{x}, \underline{y})}{\partial n_x \partial n_y} dS_y \quad (3-38)$$

$$- \rho_f \omega^2 \int_{\Sigma_f^*} \underline{u}(\underline{y}) \cdot \underline{n}_y \frac{\partial G_o(\underline{x}, \underline{y})}{\partial n_x} dS_y$$

où PF représente la partie finie de Hadamard de l'intégrale.

Après l'utilisation de l'équation (1-5) et une division par  $\rho_f \omega^2$ , l'équation (3-38) devient:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \underline{u}(\underline{x}) \cdot \underline{n}_x &= \frac{1}{\rho_f \omega^2} \text{PF} \int_{\Sigma_f} P(\underline{y}) \frac{\partial^2 G_o(\underline{x}, \underline{y})}{\partial n_x \partial n_y} dS_y \\ &\quad - \int_{\Sigma_f^*} \underline{u}(\underline{y}) \cdot \underline{n}_y \frac{\partial G_o(\underline{x}, \underline{y})}{\partial n_x} dS_y \end{aligned} \quad (3-39)$$

De la même manière qu'à la section 3.3, nous allons associer une formulation variationnelle à cette équation de manière à éviter l'évaluation de la partie finie de Hadamard.

Soit  $\delta P$  une variation admissible de  $P$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Sigma_f} \underline{u}(\underline{x}) \cdot \underline{n}_x \delta P dS_x &= \frac{1}{\rho_f \omega^2} \int_{\Sigma_f} \int_{\Sigma_f} P(\underline{y}) \frac{\partial^2 G_o(\underline{x}, \underline{y})}{\partial n_x \partial n_y} \delta P dS_y dS_x \\ &\quad - \int_{\Sigma_f} \int_{\Sigma_f^*} \underline{u}(\underline{y}) \cdot \underline{n}_y \frac{\partial G_o(\underline{x}, \underline{y})}{\partial n_x} \delta P dS_y dS_x \end{aligned} \quad (3-40)$$

Les équations du système couplé sont donc:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_s} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{u}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) d\Omega - \omega^2 \int_{\Omega_s} \rho_s \underline{u} \delta \underline{u} d\Omega + \int_{\Sigma_f} P \underline{n} \cdot \delta \underline{u} dS \\ = \int_{\Sigma_s} \underline{F} \cdot \delta \underline{u} dS \end{aligned} \quad (3-41)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Sigma_f} \underline{u}(\underline{x}) \cdot \underline{n}_x \delta P dS_x - \frac{1}{\rho_f \omega^2} \int_{\Sigma_f} \int_{\Sigma_f} P(\underline{y}) \frac{\partial^2 G_o(\underline{x}, \underline{y})}{\partial n_x \partial n_y} \delta P dS_y dS_x \\ + \int_{\Sigma_f} \int_{\Sigma_f^*} \underline{u}(\underline{y}) \cdot \underline{n}_y \frac{\partial G_o(\underline{x}, \underline{y})}{\partial n_x} \delta P dS_y dS_x = 0 \end{aligned} \quad (3-42)$$

On peut facilement voir que ce système n'est pas symétrique. Mais il est possible de le rendre symétrique en manipulant l'équation de la structure de la manière suivante:

$$\int_{\Sigma_f} P \underline{n}_x \cdot \delta \underline{u} dS = \frac{1}{2} \int_{\Sigma_f} P \underline{n}_x \cdot \delta \underline{u} dS + \frac{1}{2} \int_{\Sigma_f} P \underline{n}_x \cdot \delta \underline{u} dS_x \quad (3-43)$$

En utilisant l'équation (3-35), nous pouvons écrire:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Sigma_f} P \underline{n}_x \cdot \delta \underline{u} dS &= \int_{\Sigma_f} \int_{\Sigma_f^*} P(\underline{y}) \frac{\partial G_o(\underline{x}, \underline{y})}{\partial n_y} \underline{n}_x \cdot \delta \underline{u} dS_y dS_x \\ &\quad - \rho_f \omega^2 \int_{\Sigma_f} \int_{\Sigma_f} (\underline{u}(\underline{y}) \cdot \underline{n}_y) G_o(\underline{x}, \underline{y}) (\underline{n}_x \cdot \delta \underline{u}) dS_y dS_x \end{aligned} \quad (3-44)$$

Le système couplé devient donc:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho_f \omega^2} \int_{\Sigma_f} \int_{\Sigma_f} P(\underline{y}) \frac{\partial^2 G_o(\underline{x}, \underline{y})}{\partial n_x \partial n_y} \delta P dS_y dS_x + \frac{1}{2} \int_{\Sigma_f} \underline{u}(\underline{x}) \cdot \underline{n}_x \delta P dS_x \\ + \int_{\Sigma_f} \int_{\Sigma_f^*} \underline{u}(\underline{y}) \cdot \underline{n}_y \frac{\partial G_o(\underline{x}, \underline{y})}{\partial n_x} \delta P dS_y dS_x = 0 \end{aligned} \quad (3-45)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_s} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{u}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) d\Omega \\ - \omega^2 \left[ \int_{\Omega_s} \rho_s \underline{u} \delta \underline{u} d\Omega + \rho_f \int_{\Sigma_f} \int_{\Sigma_f} (\underline{u}(\underline{y}) \cdot \underline{n}_y) G_o(\underline{x}, \underline{y}) (\underline{n}_x \cdot \delta \underline{u}) dS_y dS_x \right] \\ + \frac{1}{2} \int_{\Sigma_f} P \underline{n} \cdot \delta \underline{u} dS_x + \int_{\Sigma_f} \int_{\Sigma_f^*} P(\underline{y}) \frac{\partial G_o(\underline{x}, \underline{y})}{\partial n_y} \underline{n}_x \cdot \delta \underline{u} dS_y dS_x \\ = \int_{\Sigma_s} \underline{F} \cdot \delta \underline{u} dS_x \end{aligned} \quad (3-46)$$

On peut voir que le système couplé obtenu est maintenant symétrique.

## Discretisation des équations

La discrétisation des équations (3-45) et (3-46) nous donne:

$$\cdot \frac{1}{2} \int_{\Sigma_f} P \underline{n} \cdot \delta \underline{u} dS \rightarrow \delta \hat{\underline{u}}^t C_1 \hat{P} \quad (3-47)$$

avec  $C_1 = 1/2C$ ,  $C$  étant donné par l'équation (3-18)

$$\bullet \int_{\Sigma_f} \int_{\Sigma_f^*} P(\underline{y}) \frac{\partial G_o(\underline{x}, \underline{y})}{\partial n_y} \underline{n} \cdot \delta \underline{u} dS_y dS_x \rightarrow \delta \hat{u}^t C_2 \hat{P} \quad (3-48)$$

$$\text{avec } C_2 = \int_{\Sigma_f} \int_{\Sigma_f^*} N^t(\underline{\xi}) \frac{\partial G_o(\underline{\xi}, \underline{\eta})}{\partial n_y} \underline{n}_x \tilde{N}(\underline{\eta}) dS_y dS_x \quad (3-49)$$

$$\bullet \rho_f \int_{\Sigma_f} \int_{\Sigma_f} (\underline{u}(\underline{y}) \cdot \underline{n}_y) G_o(\underline{x}, \underline{y}) (\underline{n}_x \cdot \delta \underline{u}) dS_y dS_x \rightarrow \delta \hat{u}^t M_o \hat{u} \quad (3-50)$$

$$\text{avec } M_o = \rho_f \int_{\Sigma_f} \int_{\Sigma_f} (N^t(\underline{\xi}) \cdot \underline{n}_y) G_o(\underline{\xi}, \underline{\eta}) (\underline{n}_x \cdot N(\underline{\eta})) dS_y dS_x \quad (3-51)$$

Les autres termes ont été discrétisés à la section 3.3.1.

Nous obtenons donc le système matriciel suivant:

$$\begin{bmatrix} K - \omega^2 (M + M_o) & C_1 + C_2 \\ C_1^t + C_2^t & \frac{D_o}{\rho_f \omega^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u} \\ \hat{P} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3-52)$$

### Calcul de la masse ajoutée

De la même manière qu'à la section 3.3.1, on obtient:

$$[K - \omega^2 (M + M_a)] u = F \quad (3-53)$$

$$\text{avec } M_a = M_o + \rho_f (C_1 + C_2) (D_o)^{-1} (C_1 + C_2)^t \quad (3-54)$$

### 3.5 Méthode de calcul des modes et des fréquences propres couplés

Le problème qui nous intéresse ici est le calcul des modes et des fréquences propres de la structure immergée dans l'eau. L'équation aux valeurs propres correspondante est:

$$[K - \omega^2(M + M_a)]u = 0 \quad (3-55)$$

La méthode de calcul est la suivante:

- On calcule les modes ( $\Phi_s$ ) et les fréquences ( $\Omega_s$ ) de la structure “in vacuo”
- On fait une projection de l'équation (3-55) sur la base modale de la structure “in vacuo”

$$[\Phi_s^t K \Phi_s - \omega^2(\Phi_s^t M \Phi_s + \Phi_s^t M_a \Phi_s)]u_m = 0 \quad (3-56)$$

$$\left[ \begin{pmatrix} \dots & & \\ & \Omega_s^2 & \\ & & \dots \end{pmatrix} - \omega^2(I + \tilde{M}_a) \right] \{u_m\} = \{0\} \quad (3-57)$$

$$\text{avec } \tilde{M}_a = \Phi_s^t M_a \Phi_s \quad (3-58)$$

- On résout l'équation (3-57) pour trouver les modes et les fréquences propres avec l'effet de masse ajoutée

### 3.6 Synthèse

Dans ce chapitre, nous avons tout d'abord montré le développement de la formulation variationnelle pour la structure. Nous avons ensuite présenté le développement des formulations variationnelles directes et indirectes pour le fluide. Finalement, nous avons terminé en montrant l'équation aux valeurs propres qui doit être résolue pour déterminer les fréquences de la structure immergée. Au chapitre suivant, nous allons exposer comment ces équations ont été implémentées numériquement.

## CHAPITRE 4 - MISE EN OEUVRE NUMÉRIQUE

### 4.1 Implantation de la méthode numérique

Aux chapitres 2 et 3, on a présenté les équations sous forme matricielle, en donnant des équations discrétisées pour les différentes matrices. Mais dans la plupart des cas, ces équations ne peuvent pas être implantées directement. Elles doivent être développées davantage afin d'obtenir des formes plus simplifiées.

Cette section présente ces développements pour les matrices  $D_o$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  et  $M_o$ , pour le cas d'une structure quelconque. On a supposé que les approximations nodales sont les mêmes pour toutes les variables ( $N = \tilde{N}$ ).

#### 4.1.1 Matrice $D_o$

On a vu plus tôt (section 3.3.1) la forme de  $D_o$  dans le cas d'une structure mince. Dans le cas d'une structure quelconque, on obtient une équation similaire, avec le potentiel de double couche  $\mu$  remplacé par la pression  $P$ .

$$\begin{aligned} & - \int_{\Sigma_f} \int_{\Sigma_f} P(\underline{x}) \frac{\partial^2 G_o(\underline{x}, \underline{y})}{\partial n_x \partial n_y} P(\underline{y}) dS_y dS_x \\ & = \int_{\Sigma_f} \int_{\Sigma_f} (\underline{n}_x \times \nabla_x P(\underline{x})) \cdot (\underline{n}_y \times \nabla_y P(\underline{y})) G_o(\underline{x}, \underline{y}) dS_y dS_x \\ & = \langle \hat{P} \rangle [D_o] \{ \hat{P} \} \end{aligned} \quad (4-1)$$

où  $\langle \rangle$  désigne un vecteur ligne,  $\{ \}$  un vecteur colonne et  $[ ]$  une matrice.

Cette équation est ensuite développée sous forme d'une sommation de matrices élémentaires:

$$\langle \hat{P} \rangle [D_o] \{ \hat{P} \} = \sum_{i=1}^{Ne} \sum_{j=1}^{Ne} [T_i]^t [d_{ij}] [T_j] \quad (4-2)$$

avec • les matrices élémentaires  $[d_{ij}]$  données par

$$[d_{ij}] = \int_{\Sigma_f^e} \int_{\Sigma_f^e} (\underline{n}_x \times \underline{\nabla}_x P(\underline{x})) \cdot (\underline{n}_y \times \underline{\nabla}_y P(\underline{y})) G_o(\underline{x}, \underline{y}) dS_y dS_x \quad (4-3)$$

- Nele le nombre d'éléments utilisés pour la discrétisation de la surface,
- $[T_i]$  et  $[T_j]$  les matrices d'assemblage des éléments  $i$  et  $j$ ,
- $\Sigma_f^e$  les surfaces élémentaires.

L'étape suivante consiste à développer chaque terme de l'équation (4-3).

$$\begin{aligned} \text{Posons } P(\underline{x}) &= [N_i(\underline{\xi}, \underline{\eta})] \{\hat{P}_i\} \\ P(\underline{y}) &= [N_j(\underline{u}, \underline{v})] \{\hat{P}_j\} \end{aligned} \quad (4-4)$$

- où • le point  $\underline{x}$  est sur l'élément  $i$  et le point  $\underline{y}$  sur l'élément  $j$ ,
- $\xi, \eta, u$  et  $v$  sont les coordonnées locales des éléments de référence  $i$  et  $j$ .

On peut exprimer les normales par

$$\underline{n}_x = \frac{1}{|j_x|} \underline{x}_{,\zeta} \quad \underline{n}_y = \frac{1}{|j_y|} \underline{y}_{,\zeta} \quad (4-5)$$

$$\begin{aligned} \text{où } |j_x| &= |\underline{x}_{,\zeta}|, & \text{avec } \underline{x}_{,\zeta} &= \underline{x}_{,\xi} \times \underline{x}_{,\eta} \\ |j_y| &= |\underline{y}_{,\zeta}|, & \underline{y}_{,\zeta} &= \underline{y}_{,u} \times \underline{y}_{,v} \end{aligned} \quad (4-6)$$

On a également besoin d'exprimer les gradients en fonction des coordonnées locales des éléments de référence:

$$\underline{\nabla}_x f(\underline{\xi}) = [J]^{-1} \underline{\nabla}_\xi f(\underline{\xi}) \quad (4-7)$$

La matrice jacobienne et son inverse sont donnés par

$$[J]^t = [\underline{x}_{,\xi}, \underline{x}_{,\eta}, \underline{x}_{,\zeta}] \quad (4-8)$$

$$\begin{aligned}
[J]^{-1} &= \frac{1}{|J|} \left[ \underline{x}_{,\eta} \times \underline{x}_{,\zeta}, \underline{x}_{,\zeta} \times \underline{x}_{,\xi}, \underline{x}_{,\xi} \times \underline{x}_{,\eta} \right] \\
&= \frac{1}{|J|} \left[ \underline{x}_{,\eta} \times \underline{x}_{,\zeta}, \underline{x}_{,\zeta} \times \underline{x}_{,\xi}, \underline{x}_{,\xi} \times \underline{x}_{,\eta} \right]
\end{aligned} \tag{4-9}$$

avec  $|J| = |j_x|^2$

De plus,  $\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = (\underline{a} \cdot \underline{c}) \underline{b} - (\underline{a} \cdot \underline{b}) \underline{c}$  (4-10)

et  $\underline{x}_{,\xi} \cdot \underline{x}_{,\zeta} = \underline{x}_{,\eta} \cdot \underline{x}_{,\zeta} = 0$  (4-11)

En utilisant les équations (4-4) à (4-11), on peut maintenant trouver les expressions discrétisées des produits vectoriels de l'équation (4-3):

$$\underline{n}_x \times \underline{\nabla}_x P(\underline{x}) \tag{4-12}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{|j_x|} \underline{x}_{,\zeta} \times \frac{1}{|j_x|^2} \left[ \underline{x}_{,\eta} \times \underline{x}_{,\zeta}, \underline{x}_{,\zeta} \times \underline{x}_{,\xi}, \underline{x}_{,\xi} \times \underline{x}_{,\eta} \right] \underline{\nabla}_\xi [N_i(\xi, \eta)] \{\hat{P}_i\} \\
&= \frac{1}{|j_x|^3} \left[ (\underline{x}_{,\zeta} \cdot \underline{x}_{,\zeta}) \underline{x}_{,\eta} - (\underline{x}_{,\zeta} \cdot \underline{x}_{,\xi}) \underline{x}_{,\xi} \right] \underline{\nabla}_\xi [N_i(\xi, \eta)] \{\hat{P}_i\} \\
&= \frac{1}{|j_x|} \left[ \underline{x}_{,\eta} N_{i,\xi}(\xi, \eta) - \underline{x}_{,\xi} N_{i,\eta}(\xi, \eta) \right] \{\hat{P}_i\}
\end{aligned}$$

et

$$\underline{n}_y \times \underline{\nabla}_y P(\underline{y}) = \frac{1}{|j_y|} \left[ \underline{y}_{,v} N_{j,u}(\underline{u}, \underline{v}) - \underline{y}_{,u} N_{j,v}(\underline{u}, \underline{v}) \right] \{\hat{P}_j\} \tag{4-13}$$

En utilisant ces expressions dans l'équation (4-3), on obtient:

$$\begin{aligned}
[d_{ij}] &= \iiint_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{|j_x|} \left[ \underline{x}_{,\eta} N_{i,\xi}(\xi, \eta) - \underline{x}_{,\xi} N_{i,\eta}(\xi, \eta) \right] \{\hat{P}_i\} \right. \\
&\quad \cdot \left. \frac{1}{|j_y|} \left[ \underline{y}_{,v} N_{j,u}(\underline{u}, \underline{v}) - \underline{y}_{,u} N_{j,v}(\underline{u}, \underline{v}) \right] \{\hat{P}_j\} \right\} G_o(\underline{x}, \underline{y}) |j_x| |j_y| d\xi d\eta du dv
\end{aligned} \tag{4-14}$$

Après simplification, cette équation devient:



$$[d_{ij}] = \iiint\limits_{-1}^1 \left\{ \langle \hat{P}_i \rangle \left[ \underline{x}_{,\eta} N_{i,\xi}(\xi, \eta) - \underline{x}_{,\xi} N_{i,\eta}(\xi, \eta) \right]^t \right. \\ \left. \cdot \left[ \underline{y}_{,v} N_{j,u}(\underline{u}, \underline{v}) - \underline{y}_{,u} N_{j,v}(\underline{u}, \underline{v}) \right] \{ \hat{P}_j \} \right\} G_o(\underline{x}, \underline{y}) d\xi d\eta du dv \quad (4-15)$$

Finalement, en remplaçant la fonction de Green par sa définition, en sortant les vecteurs de pression des intégrales et en réarrangeant les termes, on peut réécrire la matrice  $[d_{ij}]$  de la manière suivante:

$$[d_{ij}] = \langle \hat{P}_i \rangle \iiint\limits_{-1}^1 [(\underline{x}_{,\eta} \cdot \underline{y}_{,v}) N_{i,\xi}^t(\xi, \eta) N_{j,u}(\underline{u}, \underline{v}) \\ - (\underline{x}_{,\eta} \cdot \underline{y}_{,u}) N_{i,\xi}^t(\xi, \eta) N_{j,v}(\underline{u}, \underline{v}) \\ - (\underline{x}_{,\xi} \cdot \underline{y}_{,v}) N_{i,\eta}^t(\xi, \eta) N_{j,u}(\underline{u}, \underline{v}) \\ + (\underline{x}_{,\xi} \cdot \underline{y}_{,u}) N_{i,\eta}^t(\xi, \eta) N_{j,v}(\underline{u}, \underline{v})] \left( \frac{1}{4\pi r} \right) d\xi d\eta du dv \{ \hat{P}_j \} \quad (4-16)$$

#### 4.1.2 Matrice $C_1$

On a vu à la section 3.4.1 que la matrice  $C_1$  est obtenue par la discrétisation de l'intégrale

$$\frac{1}{2} \int_{\Sigma_f} P(\underline{x}) \underline{n}_x \cdot \underline{u}(\underline{x}) dS_x = \langle \hat{u} \rangle [C_1] \{ \hat{P} \} = \sum_{i=1}^{Nele} \sum_{j=1}^{Nele} [T_i]^t [c_{ij}] [T_j] \quad (4-17)$$

avec les matrices élémentaires  $[c_{ij}]$  données par

$$[c_{ij}] = \frac{1}{2} \int_{\Sigma_f^e} P(\underline{x}) \underline{n}_x \cdot \underline{u}(\underline{x}) dS_x \quad (4-18)$$

$$\begin{aligned} \text{Posons } \underline{u}(\underline{x}) &= [\tilde{N}_i(\xi, \eta)] \{ \hat{u}_i \} \\ P(\underline{x}) &= [N_j(\xi, \eta)] \{ \hat{P}_j \} \end{aligned} \quad (4-19)$$

où les matrices  $\tilde{N}_i$  sont les matrices d'interpolation augmentées, de dimension 3 par  $3n$ , avec  $n$  le nombre de noeuds par éléments.

Le produit scalaire s'écrit

$$\underline{n}_x \cdot \underline{u}(\underline{x}) = \frac{1}{|j_x|} \underline{x}_{,\zeta} \cdot [\tilde{N}_i(\underline{\xi}, \underline{\eta})] \{\hat{u}_i\} = \frac{1}{|j_x|} [\tilde{N}_i(\underline{\xi}, \underline{\eta}) \underline{x}_{,\zeta}] \{\hat{u}_i\} \quad (4-20)$$

La matrice  $[c_{ij}]$  peut donc être réécrite de la façon suivante:

$$\begin{aligned} [c_{ij}] &= \frac{1}{2} \iint_{-1}^1 [N_j(\underline{\xi}, \underline{\eta})] \{\hat{P}_j\} \frac{1}{|j_x|} [\tilde{N}_i(\underline{\xi}, \underline{\eta}) \underline{x}_{,\zeta}] \{\hat{u}_i\} |j_x| d\xi d\eta \\ &= \langle \hat{u}_i \rangle \frac{1}{2} \iint_{-1}^1 [\tilde{N}_i(\underline{\xi}, \underline{\eta}) \underline{x}_{,\zeta}]^t [N_j(\underline{\xi}, \underline{\eta})] |j_x| d\xi d\eta \{\hat{P}_j\} \end{aligned} \quad (4-21)$$

#### 4.1.3 Matrice $C_2$

On a vu à la section 3.4.1 que la matrice  $C_2$  est obtenue par la discrétisation de l'intégrale

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_f} \int_{\Sigma_f^*} P(\underline{y}) \frac{\partial G_o(\underline{x}, \underline{y})}{\partial n_y} \underline{n}_x \cdot \underline{u}(\underline{x}) dS_y dS_x &= \langle \hat{u} \rangle [C_2] \{\hat{P}\} \\ &= \sum_{i=1}^{Nele} \sum_{j=1}^{Nele} [T_i]^t [c'_{ij}] [T_j] \end{aligned} \quad (4-22)$$

avec les matrices élémentaires  $[c'_{ij}]$  données par

$$[c'_{ij}] = \int_{\Sigma_f} \int_{\Sigma_f^*} P(\underline{y}) \frac{\partial G_o(\underline{x}, \underline{y})}{\partial n_y} \underline{n}_x \cdot \underline{u}(\underline{x}) dS_y dS_x \quad (4-23)$$

$$\begin{aligned} \text{Posons } \underline{u}(\underline{x}) &= [\tilde{N}_i(\underline{\xi}, \underline{\eta})] \{\hat{u}_i\} \\ P(\underline{y}) &= [N_j(\underline{u}, \underline{v})] \{\hat{P}_j\} \end{aligned} \quad (4-24)$$

La première dérivée de la fonction de Green peut être exprimée par

$$\frac{\partial G_o(\underline{x}, \underline{y})}{\partial n_y} = \frac{-1}{4\pi r^2} \frac{(\underline{y} - \underline{x})}{r} \cdot \underline{n}_y = \frac{-1}{4\pi r^3} (\underline{y} - \underline{x}) \cdot \frac{\underline{y}, \zeta}{|j_y|} \quad (4-25)$$

De plus, on a vu à la section précédente (équation 4-20) que

$$\underline{n}_x \cdot \underline{u}(\underline{x}) = \frac{1}{|j_x|} [\tilde{N}_i(\xi, \eta) \underline{x}, \zeta] \{\hat{u}_i\} \quad (4-26)$$

On obtient donc:

$$\begin{aligned} [c'_{ij}] &= VP \iiint \int_{-1}^1 \left\{ [N_j(\underline{u}, \underline{v})] \{\hat{P}_j\} \left( \frac{-1}{4\pi r^3} (\underline{y} - \underline{x}) \cdot \frac{\underline{y}, \zeta}{|j_y|} \right) \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{|j_x|} [\tilde{N}_i(\xi, \eta) \underline{x}, \zeta] \{\hat{u}_i\} \right\} d\xi d\eta du dv \\ &= \langle \hat{u}_i \rangle VP \iiint \int_{-1}^1 \left( \frac{-1}{4\pi r^3} \right) [\tilde{N}_i(\xi, \eta) \underline{x}, \zeta]^t [N_j(\underline{u}, \underline{v})] \\ &\quad (\underline{y} - \underline{x}) \cdot \underline{y}, \zeta d\xi d\eta du dv \{\hat{P}_j\} \end{aligned} \quad (4-27)$$

où VP représente la valeur principale de l'intégrale.

#### 4.1.4 Matrice $M_o$

On a vu à la section 3.4.1 que la matrice  $M_o$  est obtenue par la discrétisation de l'intégrale

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_f} \int_{\Sigma_f} \rho_f \underline{u}(\underline{y}) \cdot \underline{n}_y G_o(\underline{x}, \underline{y}) \underline{n}_x \cdot \underline{u}(\underline{x}) dS_y dS_x &= \langle \hat{u} \rangle [M_o] \{\hat{u}\} \\ &= \sum_{i=1}^{Nele} \sum_{j=1}^{Nele} [T_i]^t [m_{ij}] [T_j] \end{aligned} \quad (4-28)$$

avec les matrices élémentaires  $[m_{ij}]$  données par

$$[m_{ij}] = \int_{\Sigma_f^e} \int_{\Sigma_f^e} \rho_f \underline{u}(\underline{y}) \cdot \underline{n}_y G_o(\underline{x}, \underline{y}) \underline{n}_x \cdot \underline{u}(\underline{x}) dS_y dS_x \quad (4-29)$$

$$\begin{aligned} \text{Posons } \underline{u}(\underline{x}) &= [\tilde{N}_i(\underline{\xi}, \underline{\eta})] \{\hat{u}_i\} \\ \underline{u}(\underline{y}) &= [\tilde{N}_j(\underline{u}, \underline{v})] \{\hat{u}_j\} \end{aligned} \quad (4-30)$$

On a vu (équation 4-20) que

$$\underline{n}_x \cdot \underline{u}(\underline{x}) = \frac{1}{|j_x|} [\tilde{N}_i(\underline{\xi}, \underline{\eta}) \underline{x}_{,\zeta}] \{\hat{u}_i\} \quad (4-31)$$

De manière similaire, on peut écrire

$$\underline{u}(\underline{y}) \cdot \underline{n}_y = \frac{1}{|j_y|} [\tilde{N}_j(\underline{u}, \underline{v}) \underline{y}_{,\zeta}] \{\hat{u}_j\} \quad (4-32)$$

On peut donc réécrire la matrice  $[m_{ij}]$  sous la forme

$$[m_{ij}] = \rho_f \iiint \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{|j_y|} [\tilde{N}_j(\underline{u}, \underline{v}) \underline{y}_{,\zeta}] \{\hat{u}_j\} G_o(\underline{x}, \underline{y}) \frac{1}{|j_x|} \right. \\ \left. [\tilde{N}_i(\underline{\xi}, \underline{\eta}) \underline{x}_{,\zeta}] \{\hat{u}_i\} \right\} |j_x| |j_y| d\xi d\eta du dv \quad (4-33)$$

Cette équation devient, après simplification

$$[m_{ij}] = \langle \hat{u}_i \rangle \rho_f \iiint \int_{-1}^1 [\tilde{N}_i(\underline{\xi}, \underline{\eta}) \underline{x}_{,\zeta}]^t [\tilde{N}_j(\underline{u}, \underline{v}) \underline{y}_{,\zeta}] \left( \frac{1}{4\pi r} \right) \\ d\xi d\eta du dv \{\hat{u}_j\} \quad (4-34)$$

## 4.2 Moyens mis en oeuvre

Les deux premiers objectifs de ce projet concernent le développement d'un logiciel permettant de faire l'évaluation de la matrice de masse ajoutée par le fluide sur la structure. Un logiciel permettant d'évaluer cette matrice dans le cas d'une structure mince est disponible au GAUS (Groupe d'acoustique et vibrations de l'université de Sherbrooke). Cependant, le

logiciel du GAUS utilise une discrétisation du domaine par éléments quadrangles uniquement, alors que les maillages utilisés à l'IREQ utilisent aussi des éléments triangulaires. La première modification apportée au logiciel du GAUS est donc l'implantation d'éléments triangulaires.

La seconde modification apportée à ce logiciel concerne la formulation utilisée. En effet, la version du logiciel du GAUS permet seulement d'évaluer la matrice de masse ajoutée dans le cas d'une structure mince en contact avec le fluide sur ses deux faces (équation (3-26)). Comme cette formulation ne peut pas être appliquée dans le cas d'une turbine hydraulique, la formulation obtenue dans le cas d'une structure quelconque (équation (3-53)) a été implantée.

Les résultats obtenus avec les deux formulations ont ensuite été validés par comparaison avec des résultats numériques et expérimentaux disponibles dans la littérature.

Le troisième objectif concerne l'intégration du calcul de la masse ajoutée à une des méthodes de calcul des fréquences propres disponibles à l'IREQ. Il s'est donc agi de réaliser une interface avec Nastran. Pour ce faire, le logiciel a dû être modifié pour pouvoir traiter un maillage dans le format de Nastran. L'étape suivante a consisté à permettre la lecture des modes de la structure «in vacuo» calculés par Nastran, puis à faire la projection de la matrice de masse ajoutée obtenue sur cette base modale. Finalement, la matrice réduite est sauvegardée dans un fichier. Les résultats obtenus avec cette méthode ont également été validés pour des cas simples.

Le dernier objectif concerne l'utilisation du logiciel développé afin de calculer la masse ajoutée, ainsi que les fréquences et les modes couplés d'un cas réel. Le maillage d'une roue de turbine hydraulique est disponible à l'IREQ. Il s'est donc agi d'utiliser le logiciel pour évaluer la matrice de masse ajoutée et ensuite calculer les fréquences et les modes couplés de cette structure.

Finalement, on s'est également intéressé au phénomène de couplage entre plusieurs structures immergées dans le même domaine fluide.

## 4.3 Programme

### 4.3.1 Fonctionnement général

#### Formulations

Le programme «wetfreq» peut calculer la matrice de masse ajoutée en utilisant deux des formulations présentées au chapitre 3. La première formulation possible est la formulation intégrale indirecte en fonction du potentiel de double couche pour le cas d'une structure mince (voir section 3.3.1). La seconde, la formulation directe en pression pour le cas d'une structure quelconque (section 3.4.1).

Le choix de la formulation utilisée pour le calcul dépend des conditions limites fournies pour le fluide dans le fichier de données (voir annexe C). Dans le cas de la formulation indirecte, on doit imposer un saut de pression nul sur le contour de la structure afin d'assurer une continuité dans la distribution de pression. Si des conditions limites de ce type sont fournies, le programme utilise donc la formulation indirecte et impose un saut de pression nul aux noeuds indiqués.

Si aucune condition limite n'est fournie ou que des conditions limites sur la pression sont fournies, le programme utilise la formulation directe en pression. Dans ce cas, le programme impose une pression nulle aux noeuds indiqués ou au premier noeud si aucun noeud n'est spécifié. Des conditions limites sur la pression doivent être fournies dans le cas où plusieurs structures se retrouvent dans le même domaine fluide; un noeud par structure doit être bloqué afin d'assurer une solution unique au système.

#### Sauvegarde des résultats

Le programme calcule la matrice de masse ajoutée réduite et la sauvegarde dans un fichier sous le format «direct matrix input» (DMI) de Nastran. Le «large field format» (champs de 16 caractères) est utilisé pour ce fichier afin de conserver une précision convenable sur les masses ajoutées modales. Le programme peut aussi effectuer le calcul des fréquences et des modes couplés par une méthode de Rayleigh. Les fréquences et les modes couplés sont sauvegardés dans des fichiers différents. Le fichier contenant les modes est

formaté de façon à pouvoir être lu par le logiciel de modélisation MSC/XL, ce qui permet de visualiser les modes couplés (voir annexe A).

## Ordre des modes

Avant d'être sauvegardé, les fréquences et les modes couplés sont réordonnés car ils ne sont pas nécessairement dans le même ordre que les modes «in vacuo». Ce changement dans l'ordre s'explique par le fait que la diminution de fréquences causée par la masse ajoutée n'est pas la même pour tous les modes. Les modes les plus influencés sont les modes qui causent un plus grand déplacement de l'eau, c'est-à-dire les modes avec les déplacements les plus importants. On peut donc dire, en règle générale, que les modes de flexion sont plus fortement influencés que les modes de torsion puisqu'ils présentent habituellement un déplacement plus important.

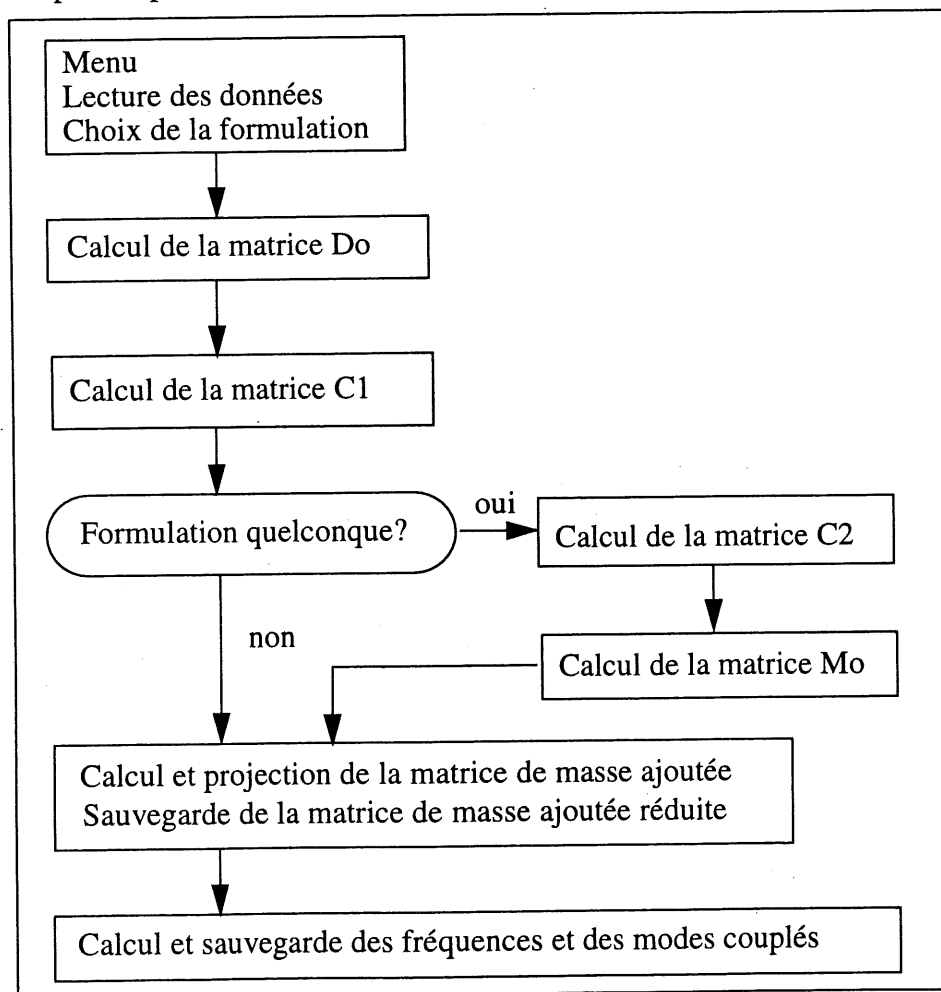


Figure 4.1 Fonctionnement du programme

Dans les cas simples, le couplage entre les modes est faible. La visualisation des modes couplés peut donc être suffisante pour déterminer la correspondance entre les modes couplés et les modes «in vacuo». Mais dans un cas plus complexe comme une roue de turbine hydraulique, où le couplage entre les modes est important, cette méthode est insuffisante. C'est pourquoi une méthode permettant de déterminer automatiquement l'ordre des modes couplés a été implantée. Cette méthode est basée sur le fait que les modes de la structure immergée sont composés par un couplage entre les modes de la base modale «in vacuo».

$$\Phi_c = \Phi_s u_m$$

avec  $\Phi_c$  les modes de la structure immergée

$\Phi_s$  les modes de la structure «in vacuo»

$u_m$  les vecteurs propres en coordonnées modales (obtenus lors de la résolution de l'équation 3-57)

Les vecteurs propres en coordonnées modales représentent le degré de participation de chacun des modes «in vacuo». En identifiant le terme le plus important dans chacun de ces vecteurs propres, on peut donc identifier le mode «in vacuo» dominant dans chacun des modes couplés. C'est ce qui nous permet de classer les modes couplés de façon à ce qu'ils correspondent aux modes «in vacuo».

## Projection des matrices

La méthode utilisée pour faire la projection de la matrice de masse ajoutée dépend des différentes options spécifiées dans le menu.

La première possibilité est de faire la projection de la matrice de masse ajoutée une fois que celle-ci est complètement assemblée. C'est la méthode qui demande le plus d'espace mémoire.

La seconde possibilité est de projeter un côté des matrices de couplage ( $C_1$  et  $C_2$ ) avant leur assemblage, tout en continuant à faire la projection de la matrice de masse du fluide ( $M_0$ ) après qu'elle soit complètement assemblée. C'est la méthode qui est utilisée par défaut. Elle permet de diminuer de façon significative l'espace mémoire nécessaire, et demande un temps de calcul similaire ou même inférieur à la première méthode.



La dernière possibilité consiste à projeter un côté des matrices de couplage ( $C_1$  et  $C_2$ ) et de la matrice de masse du fluide ( $M_0$ ) avant leur assemblage. La deuxième partie de la projection de la matrice  $M_0$  est effectuée après son assemblage. Cette méthode permet de réduire davantage l'espace mémoire nécessaire. Il faut cependant noter que le temps de calcul est un peu plus important qu'avec les deux premières méthodes.

Finalement, on peut remarquer que toutes les matrices calculées par le programme sont pleines. Les matrices de couplage ( $C_1$  et  $C_2$ ) sont rectangulaires et doivent être stockées en entier. Les matrices du fluide ( $D_0$  et  $M_0$ ) ainsi que la matrice de masse ajoutée ( $M_a$ ) sont carrées symétriques. Elles sont donc stockées sous forme triangulaires afin d'optimiser l'espace mémoire nécessaire.

#### 4.3.2 Hypothèses et limitations

La principale limitation du programme concerne les types d'éléments qui peuvent être utilisés. Le programme ne peut pas traiter d'éléments triangulaires quadratiques. Cette limitation provient de la méthode utilisée pour faire l'intégration numérique des termes singuliers. Elle suppose que les éléments triangulaires sont linéaires, ce qui permet de simplifier les calculs puisqu'un élément triangulaire linéaire est obligatoirement dans un seul plan. La normale et les gradients sont donc constants et peuvent être sortis des intégrales.

On suppose également, lors du calcul des fréquences couplées par «wetfreq», que les vecteurs propres «in vacuo» sont normalisés par rapport à la masse. On utilise en effet les propriétés d'orthogonalité des vecteurs propres spécifiant que lorsqu'ils sont normalisés par rapport à la masse, la projection sur la base modale de la matrice de rigidité donne la matrice des valeurs propres et que celle de la matrice de masse donne la matrice identité.

De plus, le calcul s'effectue avec la même formulation sur l'ensemble de la structure, ce qui impose une restriction supplémentaire au maillage. Le programme ne peut pas traiter de structures composées à la fois de composantes minces en contact avec le fluide sur leur deux faces et de composantes quelconques. Cette restriction ne signifie cependant pas que le maillage ne peut pas contenir un mélange d'éléments de plaque et d'éléments solides. Elle

signifie seulement que dans ce cas, les éléments de plaque doivent être en contact avec le fluide sur une seule face, afin que l'ensemble de la structure puisse être traitée avec la même formulation.

#### 4.3.3 Autres programmes

Une série de programmes complémentaires a été développée afin de réaliser certaines tâches bien précises. Une description plus détaillée du fonctionnement de ces programmes est fournie à l'annexe B.

- prebem

Ce programme sert à extraire le maillage de la surface mouillée d'un maillage 3D quelconque. Le maillage de départ doit être dans le format des fichiers d'entrée de MSC/Nastran (Reymond et Miller, 1994).

Le programme «prebem» sépare les éléments solides en faces, puis identifie celles qui se retrouvent uniquement dans un seul élément et les extrait pour former le maillage de surface. Les éléments sont alors numérotés de façon à obtenir une normale externe.

Ce programme peut extraire la surface mouillée des éléments solides du maillage, des éléments de plaque ou de la combinaison des deux, selon l'option spécifiée sur la ligne de commande. Il peut également enlever une surface qui ne correspond pas à une surface mouillée et traiter les conditions limites fournies pour la pression, ainsi que les vecteurs propres de la structure «in vacuo». Finalement, il peut transformer les éléments triangulaires quadratiques en éléments linéaires.

- bem2dat

Ce programme sert à transformer le maillage de surface obtenu par «prebem» dans un format pouvant être lu par MSC/XL. Il est ainsi possible de visualiser ce maillage (voir annexe A).

- bemcplg

Ce programme sert à combiner deux maillages afin de pouvoir calculer le couplage engendré par le fluide entre deux structures (chapitre 6). Il permet d'imposer des translations et des rotations à un des deux maillages.

- addmass

Ce programme sert à additionner des matrices de masses ajoutées modales et à calculer les fréquences et les modes couplés résultants.

#### 4.3.4 Intégration numérique

L'évaluation des intégrales régulières est effectuée avec des points de Gauss pour les éléments quadrangles et des points de Hammer pour les éléments triangulaires (Atalla, 1997a).

$$\text{Gauss} \quad I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) dx dy = \sum_i \sum_j f(\xi_i, \eta_j) w_i w_j \quad (4-35)$$

$$\text{Hammer} \quad I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) dx dy = \sum_i f(\xi_i, \eta_i) w_i \quad (4-36)$$

L'évaluation des intégrales singulières (éléments quadrangles) est effectuée avec des points de Wang (Wang et Atalla, 1997).

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{f(x, y)}{R} dx dy = \sum_i \sum_j f(\xi_i, \eta_j) \frac{r}{R} w_{ij} \quad (4-37)$$

L'évaluation des intégrales singulières (éléments triangulaires) est effectuée par une méthode analytique (Sgard, 1995), en subdivisant les éléments de référence en trois parties et en effectuant un changement de variables en coordonnées polaires.

#### 4.3.5 Fonctionnement de l'interface avec Nastran

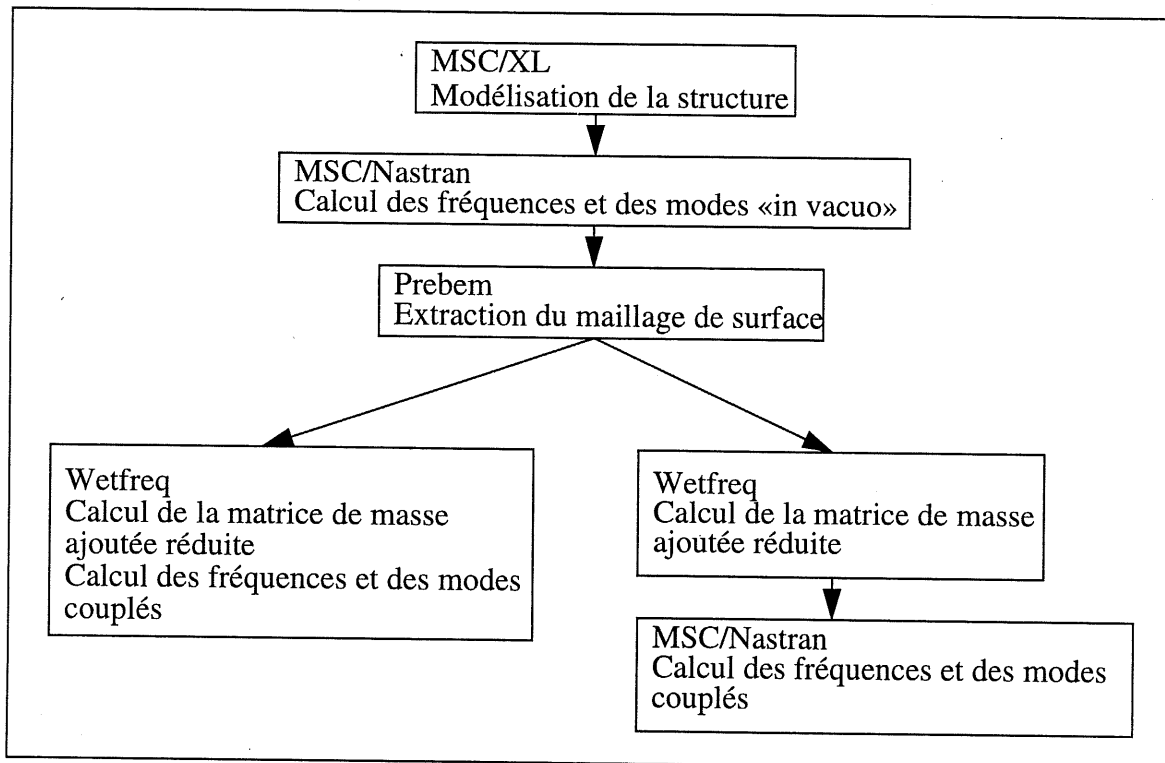
Le programme «wetfreq» s'utilise en combinaison avec le logiciel commercial Nastran. L'interface entre les deux programmes est effectuée avec différents fichiers de données. L'annexe C fournit le format de ces différents fichiers.

La procédure à suivre pour le calcul des fréquences et des modes couplés est la suivante:

1. Modélisation de la structure et calcul des fréquences et des modes «in vacuo» avec le logiciel commercial Nastran

2. Exécution du programme «prebem» pour extraire le maillage de surface
3. Exécution du programme «wetfreq» pour calculer la matrice de masse ajoutée réduite
4. Lecture de la matrice de masse ajoutée réduite par Nastran et calcul des fréquences et des modes propres du système couplé

Alternativement, l'étape 5 peut être éliminée et les fréquences et les modes propres du système couplé peuvent être calculés directement par «wetfreq».



**Figure 4.2 Procédure à suivre**

## 4.4 Synthèse

Dans ce chapitre, nous avons présenté l'implantation sous forme numérique des équations énoncées au chapitre 3. Nous avons également exposé le fonctionnement du logiciel développé. Dans le chapitre suivant, nous allons présenter différents cas tirés de la littérature afin de démontrer la validité de ce logiciel.

## CHAPITRE 5 - VALIDATIONS

Ce chapitre présente les différents cas utilisés pour valider le logiciel. Dans tous les cas, le calcul des fréquences «in vacuo» est réalisé avec Nastran, alors que le calcul des fréquences avec l'effet de masse ajoutée est réalisé par «wetfreq».

### 5.1 Plaque libre

#### 5.1.1 Description

Il s'agit d'une plaque mince en acier immergée dans l'eau. La plaque est complètement libre. Un maillage composé de  $6 \times 10 \times 1$  éléments hexaédriques à 20 noeuds (maillage #1), ainsi qu'un maillage composé de  $12 \times 20$  éléments de plaque à 8 noeuds (maillage #2) ont été utilisés.

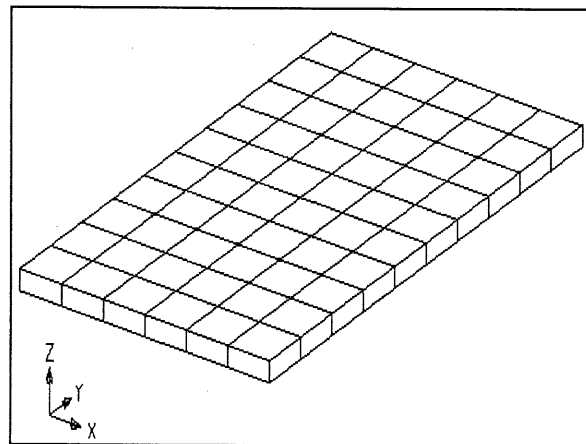


Figure 5.1 Plaque libre

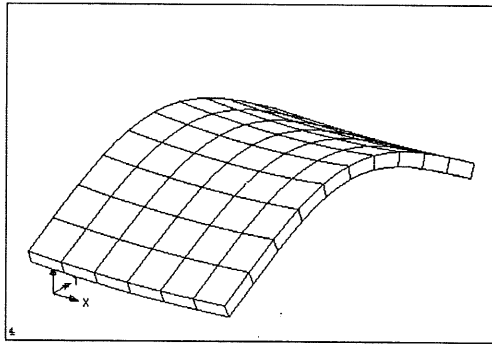
<b>Propriétés</b>	$E = 208.8 \text{ GPa}$	<b>Dimensions</b>	$a = 0.270 \text{ m}$
	$\nu = 0.3$		$b = 0.1495 \text{ m}$
	$\rho_{\text{acier}} = 7797 \text{ kg/m}^3$		$h = 8.96 \text{ mm}$
	$\rho_{\text{eau}} = 997 \text{ kg/m}^3$		

**Nombre de vecteurs propres dans la base modale** 50

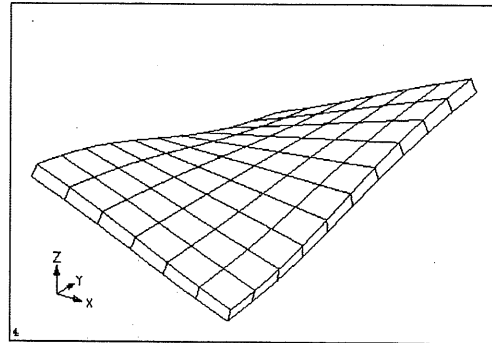
<b>Formulation</b>	maillage #1 - directe
	maillage #2 - indirecte

### 5.1.2 Résultats utilisés pour la comparaison

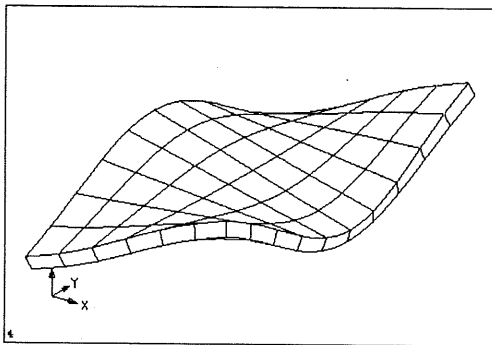
La comparaison des fréquences est montrée au tableau 5.1, alors que la figure 5.2 montre les déformées modales.



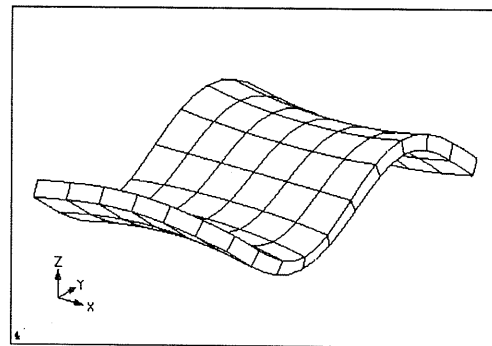
Mode # 1



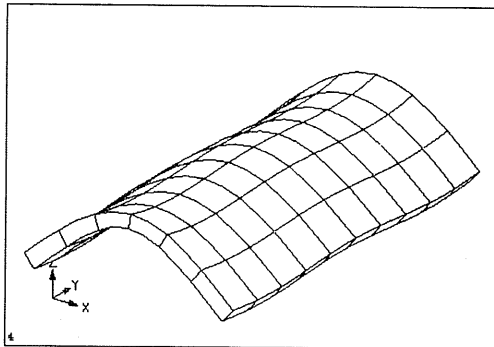
Mode # 2



Mode # 3



Mode # 4



Mode # 5

**Figure 5.2** Plaque libre - déformées modales

Les résultats utilisés pour la comparaison sont les résultats tirés de l'article de Sundqvist (1983). Ces résultats sont obtenus expérimentalement. Sundqvist donne également les

résultats qu'il a obtenu avec le logiciel commercial ADINA, en utilisant un maillage de 6x10 éléments de plaque à 9 noeuds pour modéliser la structure et un maillage de 26x18x8 éléments 3D pour modéliser le fluide.

Les résultats de Olson et Bathe (1985) sont également montrés. Ces résultats sont obtenus par une méthode d'éléments finis, en utilisant un maillage de 6x10x1 éléments hexaédriques à 20 noeuds pour la structure et 10x14x7 éléments hexaédriques à 20 noeuds pour le fluide. Dans ce cas, le domaine fluide modélisé est de 0.57m x 0.57m x 0.57m.

### 5.1.3 Résultats et commentaires

On peut voir que, dans le cas du maillage #1, les fréquences «in vacuo» obtenues avec Nastran et les fréquences dans l'eau obtenues par «wetfreq» correspondent très bien aux résultats expérimentaux de Sundqvist. L'erreur est du même ordre que celle sur les résultats de Adina. Dans le cas du maillage #2, la différence est un peu plus importante, mais la correspondance est tout de même assez bonne.

## 5.2 **Cylindre simplement supporté aux extrémités**

### 5.2.1 Description

Il s'agit d'un cylindre mince immergé dans l'eau. Le cylindre est simplement supporté aux extrémités. Le maillage est composé de 24 éléments selon la circonférence et de 20 selon l'axe. Il s'agit d'éléments de plaque à 8 noeuds. Deux cas ont été représentés: le cylindre en contact avec le fluide sur ses deux faces (intérieure/extérieure) et le cylindre en contact avec un fluide extérieur uniquement.

<b>Propriétés</b>	E = 2198.1 GPa	<b>Dimensions</b>	R = 0.235 m
	$\nu = 0.3$		L = 0.940 m
	$\rho_{\text{acier}} = 7850 \text{ kg/m}^3$		h = 2.35 mm
	$\rho_{\text{eau}} = 1000 \text{ kg/m}^3$		

**Nombre de vecteurs propres dans la base modale 30**

<b>Formulation</b>	fluide extérieur - directe
	fluide intérieur/extérieur - indirecte

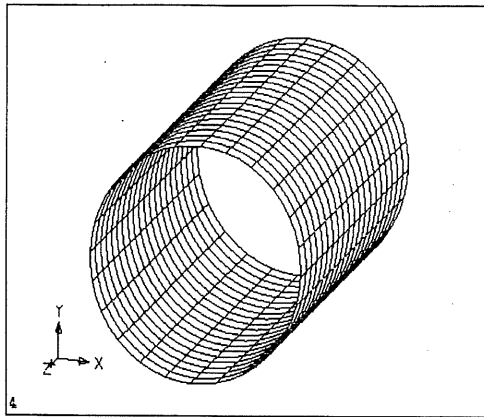
**TABLEAU 5.1. Plaque libre - comparaison des fréquences**

Source	No. du mode	Fréquences «in vacuo» (Hz)	$\Delta f$ (%)	Fréquences couplées (Hz)	$\Delta f$ (%)
Sundqvist - Expérimental	1	641.000	(r)	497.000	(r)
	2	712.000	(r)	575.000	(r)
	3	1577.000	(r)	1293.000	(r)
	4	1766.000	(r)	1408.000	(r)
	5	2139.000	(r)	1758.000	(r)
Sundqvist - Adina	1	645.000	0.62	489.000	-1.61
	2	716.000	0.56	561.000	-2.43
	3	1585.000	0.51	1277.000	-1.24
	4	1766.000	0.00	1411.000	0.21
	5	2115.000	-1.12	1740.000	-1.02
Olson et Bathe	1	656.000	2.34	516.000	3.82
	2	727.000	2.11	(nd)	(nd)
	3	1618.000	2.60	(nd)	(nd)
	4	1815.000	2.77	(nd)	(nd)
	5	2192.000	2.48	1844.000	4.89
Nastran / Wetfreq (maillage #1)	1	644.730	0.58	503.349	1.28
	2	710.414	-0.22	578.392	0.59
	3	1568.565	-0.53	1306.722	1.06
	4	1747.856	-1.03	1421.624	0.97
	5	2084.977	-2.53	1755.429	-0.15
Nastran / Wetfreq (maillage #2)	1	654.565	2.12	518.424	4.31
	2	720.389	1.18	596.487	3.74
	3	1601.363	1.54	1349.010	4.33
	4	1799.054	1.87	1468.619	4.31
	5	2179.103	1.87	1833.066	4.27

(r) - référence

(nd) - non disponible





**Figure 5.3 Cylindre simplement supporté**

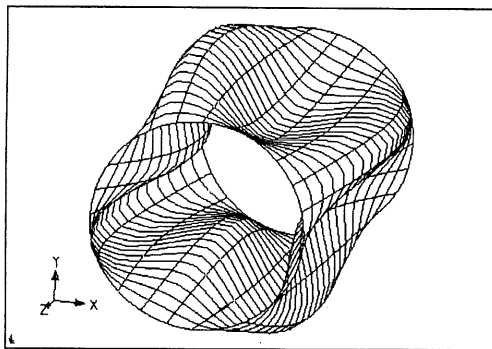
### 5.2.2 Résultats utilisés pour la comparaison

La comparaison des fréquences est montrée au tableau 5.2, alors que la figure 5.4 montre les déformées modales.

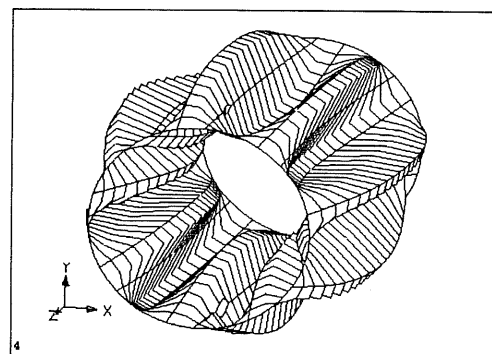
Les résultats utilisés pour la comparaison sont les résultats tirés de l'article de Selmane et Lakis (1997). Ces résultats sont obtenus par une méthode hybride éléments finis - théorie des plaques.

### 5.2.3 Résultats et commentaires

On peut voir que les fréquences «in vacuo» obtenues avec Nastran et les fréquences dans l'eau obtenues avec «wetfreq» correspondent très bien à celles présentées par Selmane et Lakis.



Mode # 4-1



Mode # 8-1

**Figure 5.4 Cylindre simplement supporté - déformées modales**

**TABLEAU 5.2. Cylindre simplement supporté - comparaison des fréquences**

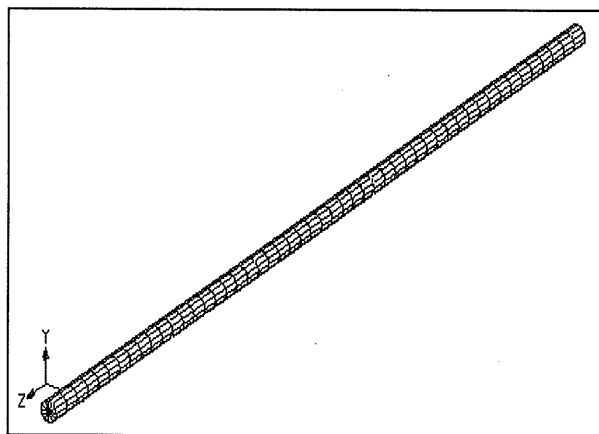
Source	Mode	Fréquences «in vacuo» (Hz)	$\Delta f$ (%)	Fréquences couplées (extérieur) (Hz)	$\Delta f$ (%)	Fréquences couplées (extérieur/ intérieur) (Hz)	$\Delta f$ (%)
Selmane et Lakis	4-1	659.000	(r)	331.400	(r)	251.400	(r)
	8-1	2187.000	(r)	1361.000	(r)	1064.000	(r)
Wetfreq	4-1	657.049	-0.30	331.208	-0.06	251.071	-0.13
	8-1	2158.398	-1.31	1357.221	-0.28	1069.050	0.47

(r) - référence

## 5.3 Poutre encastrée

### 5.3.1 Description

Il s'agit d'une poutre encastrée à une extrémité. Elle est modélisée par 50x12x1 éléments hexaédriques à 8 noeuds.



**Figure 5.5 Poutre encastrée**

#### Propriétés

$E = 29.4 \text{ GPa}$

$\nu = 0.3$

$\rho_{\text{structure}} = 2450 \text{ kg/m}^3$

$\rho_{\text{eau}} = 1000 \text{ kg/m}^3$

#### Dimensions

$R = 0.20 \text{ m}$

$L = 20.0 \text{ m}$

**Nombre de vecteurs propres dans la base modale**

30

**Formulation** directe

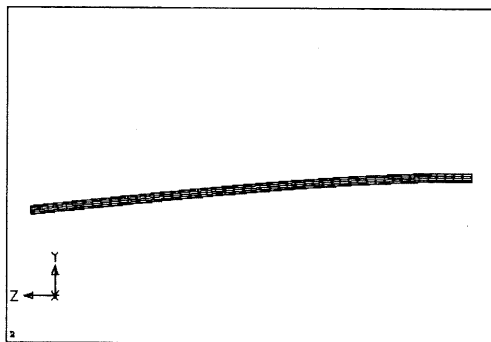
### 5.3.2 Résultats utilisés pour la comparaison

La comparaison des fréquences est montrée aux tableaux 5.3 et 5.4, alors que la figure 5.6 montre les déformées modales.

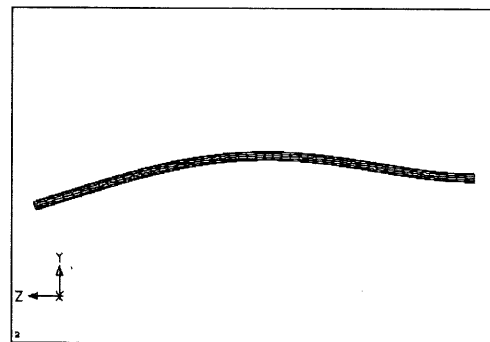
Les résultats utilisés pour la comparaison sont les résultats tirés de l'article de Han et Xu (1996). Ces résultats sont obtenus par une méthode analytique ainsi que par une formule simple. Cette formule simple est basée sur le concept de la masse ajoutée. Un coefficient de masse ajoutée défini par une équation du second degré en fonction du rapport  $R/L$  du cylindre est utilisé. Les résultats pour les trois premiers modes sont tirés directement de l'article, alors que les résultats pour les modes 4 à 8 sont calculés avec la formule fournie par Han et Xu.

### 5.3.3 Résultats et commentaires

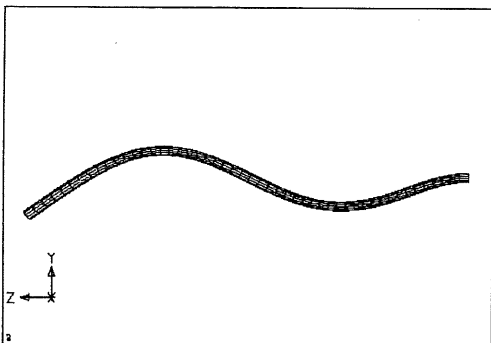
On peut voir que les fréquences «in vacuo» obtenues avec Nastran et les fréquences dans l'eau obtenues avec «wetfreq» correspondent très bien à celles présentées par Han et Xu.



Mode # 1



Mode # 2



Mode # 3

**Figure 5.6 Poutre encastrée - déformées modales**

**TABLEAU 5.3. Poutre encastrée - comparaison des fréquences (modes 1 à 3)**

Source	No. du mode	Fréquences «in vacuo» (Hz)	$\Delta f$ (%)	Fréquences couplées (Hz)	$\Delta f$ (%)
Han - analytique	1	0.485	(r)	0.416	(r)
	2	3.037	(r)	2.599	(r)
	3	8.504	(r)	7.260	(r)
Han - formule	1	0.485	0.0	0.416	0.0
	2	3.037	0.0	2.606	0.3
	3	8.504	0.0	7.296	0.5
Nastran / Wetcfreq	1	0.486	0.29	0.419	0.74
	2	3.042	0.16	2.623	0.92
	3	8.503	-0.01	7.342	1.14

(r) - référence

**TABLEAU 5.4. Poutre encastrée - comparaison des fréquences (modes 4 à 8)**

Source	No. du mode	Fréquences «in vacuo» (Hz)	$\Delta f$ (%)	Fréquences couplées (Hz)	$\Delta f$ (%)
Han - formule	4	16.664	(r)	14.298	(r)
	5	27.547	(r)	23.636	(r)
	6	41.151	(r)	35.307	(r)
	7	57.475	(r)	49.314	(r)
	8	76.520	(r)	65.654	(r)
Nastran / Wetcfreq	4	16.624	-0.24	14.384	0.60
	5	27.401	-0.53	23.772	0.58
	6	40.791	-0.87	35.498	0.54
	7	56.747	-1.27	49.553	0.48
	8	75.213	-1.71	65.922	0.41

(r) - référence

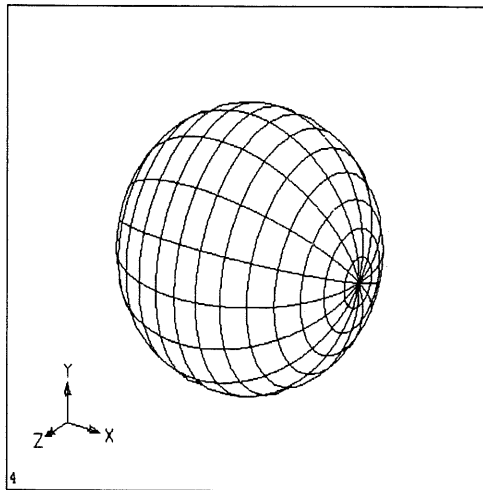
## 5.4 Sphère libre

### 5.4.1 Description

Il s'agit d'une sphère mince en acier submergée dans l'eau. La sphère est complètement libre et est modélisée par 16x16 éléments de plaque à 8 noeuds.

<b>Propriétés</b>	$E = 206.8 \text{ GPa}$	<b>Dimensions</b>	$R = 0.3048 \text{ m}$
	$\nu = 0.3$		$h = 9.144 \text{ mm}$
	$\rho_{\text{acier}} = 7850 \text{ kg/m}^3$		
	$\rho_{\text{eau}} = 997 \text{ kg/m}^3$		

**Nombre de vecteurs propres dans la base modale** 80  
**Formulation** directe



**Figure 5.7** Sphère libre

#### 5.4.2 Résultats utilisés pour la comparaison

La comparaison des fréquences est montrée au tableau 5.5, alors que la figure 5.8 montre les déformées modales.

Les résultats utilisés pour la comparaison sont les résultats tirés de l'article de Ding et Chen (1996). Ces résultats sont obtenus par une méthode analytique et correspondent aux modes axisymétriques.

#### 5.4.3 Résultats et commentaires

On peut voir que les fréquences «in vacuo» obtenues par Nastran et les fréquences dans l'eau obtenues par «wetfreq» correspondent très bien aux résultats présentés par Ding et Chen.

**TABLEAU 5.5. Sphère libre - comparaison des fréquences**

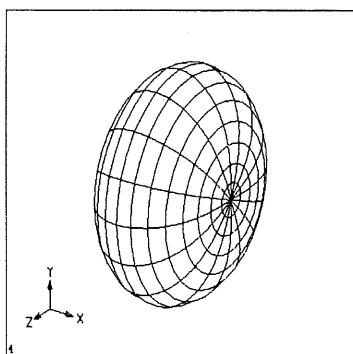
Source	No. du mode	Fréquences «in vacuo» (Hz)	$\Delta f$ (%)	Fréquences couplées (Hz)	$\Delta f$ (%)
Ding et Chen théorie élastique 3D	2	1958.298	(r)	1372.775	(r)
	3	2364.195	(r)	1701.566	(r)
	4	2509.009	(r)	1870.400	(r)
	5	2625.278	(r)	2022.002	(r)
	6	2748.335	(r)	2173.604	(r)
	7	2901.330	(r)	2346.963	(r)
	8	3101.842	(r)	2557.048	(r)
Ding et Chen théorie des plaques	2	1971.004	0.65	1395.924	1.69
	3	2342.960	-0.90	1699.477	-0.12
	4	2510.053	0.04	1885.716	0.82
	5	2629.977	0.18	2038.711	0.83
	6	2755.819	0.27	2192.750	0.88
	7	2914.210	0.44	2369.416	0.96
	8	3121.162	0.62	2584.027	1.06
Nastran / Welfreq	2	1967.584	0.47	1393.828	1.53
	3	2334.082	-1.27	1691.748	-0.58
	4	2496.673	-0.49	1870.740	0.02
	5	2612.725	-0.48	2020.109	-0.09
	6	2730.532	-0.65	2167.451	-0.28
	7	2878.539	-0.79	2338.399	-0.36
	8	3068.715	-1.07	2542.231	-0.58

(r) - référence

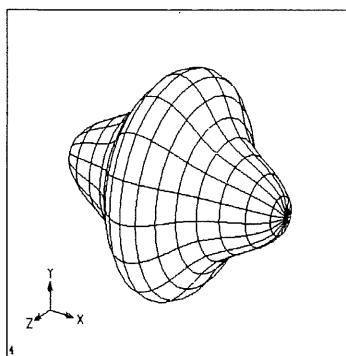
## 5.5 Avant-directrices de Brisay

### 5.5.1 Description

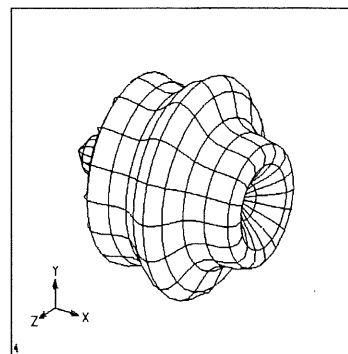
Il s'agit des trois types d'avant-directrices qu'on retrouve à la centrale de Brisay. Les profils sont similaires pour tous les types, mais les dimensions diffèrent.



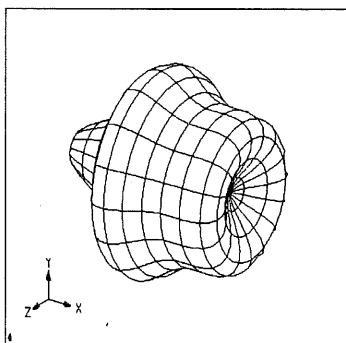
Mode # 2



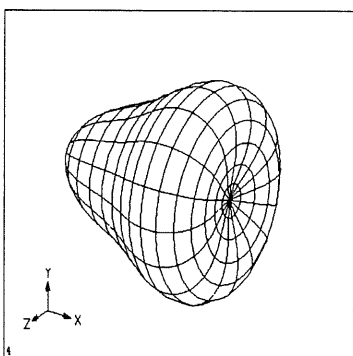
Mode # 4



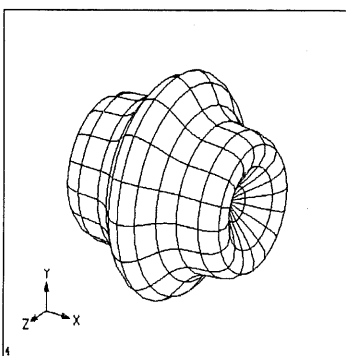
Mode # 7



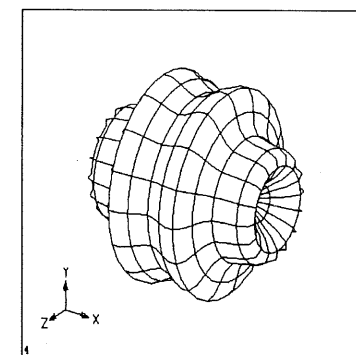
Mode # 5



Mode # 3

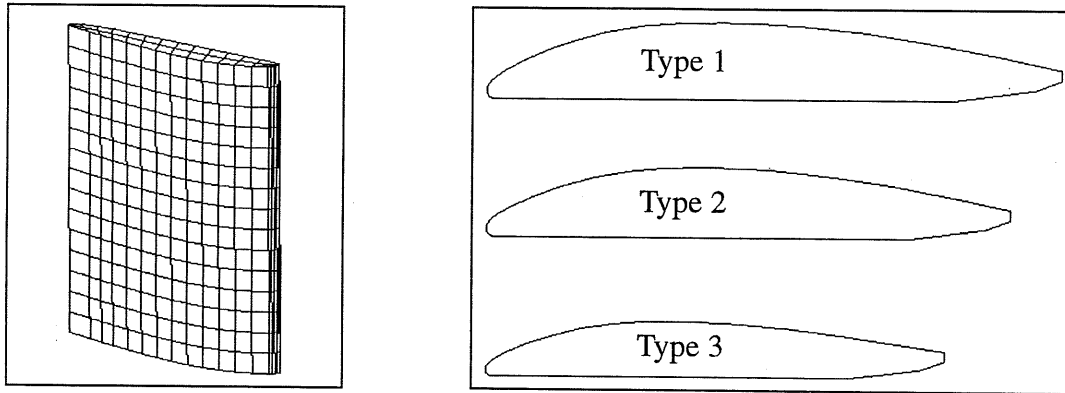


Mode # 6



Mode # 8

**Figure 5.8 Sphère libre - déformées modales**



**Figure 5.9 Avant-directrices de Brisay**

**Propriétés**

$E = 210.0 \text{ GPa}$   
 $\nu = 0.3$   
 $\rho_{\text{acier}} = 7830 \text{ kg/m}^3$   
 $\rho_{\text{eau}} = 1000 \text{ kg/m}^3$

**Nombre de vecteurs propres dans la base modale** 20

**Formulation** directe

### 5.5.2 Résultats utilisés pour la comparaison

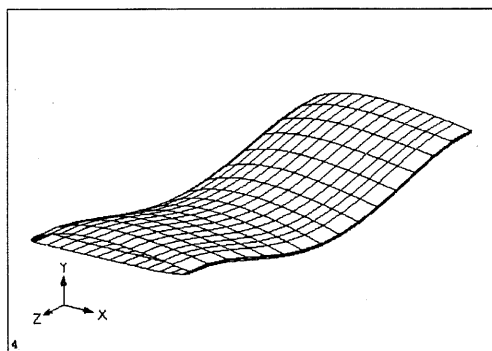
La comparaison des fréquences est montrée aux tableaux 5.6 et 5.7, alors que la figure 5.10 montre les déformées modales.

Les résultats utilisés pour la comparaison sont les résultats tirés d'un rapport interne de la compagnie Générale Électrique (GE)(Grenier, 1991). Ces résultats sont obtenus en considérant les avant-directrices comme des poutres encastées aux deux extrémités et en estimant l'influence de l'eau à 30%.

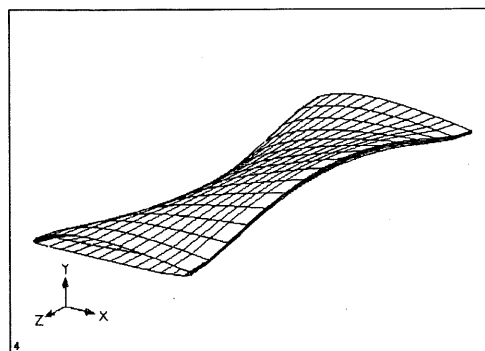
### 5.5.3 Résultats et commentaires

On peut voir au tableau 5.6 que les résultats obtenus avec Nastran et «wetfreq» correspondent bien avec ceux présentés par Grenier.

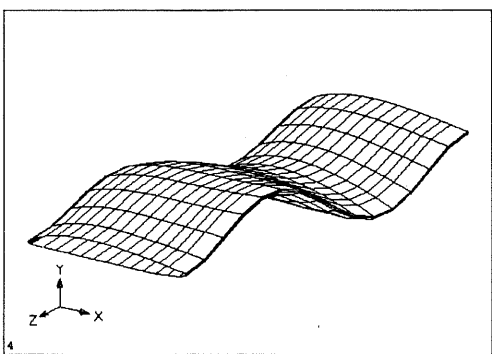




Mode # 1



Mode # 2



Mode # 3

**Figure 5.10 Avant-directrices de Brisay - déformées modales**

**TABLEAU 5.6. Avant-directrices de Brisay - comparaison des fréquences naturelles (premier mode)**

Source	Type	Fréquences «in vacuo» (Hz)	$\Delta f$ (%)	Fréquences couplées (Hz)	$\Delta f$ (%)
GE	1	72.7	(r)	50.9	(r)
	2	65.4	(r)	45.8	(r)
	3	52.6	(r)	36.8	(r)
Nastran / Wetfreq	1	73.44	1.0	52.04	2.2
	2	66.85	2.2	47.31	3.3
	3	53.31	1.3	36.73	0.2

(r) - référence

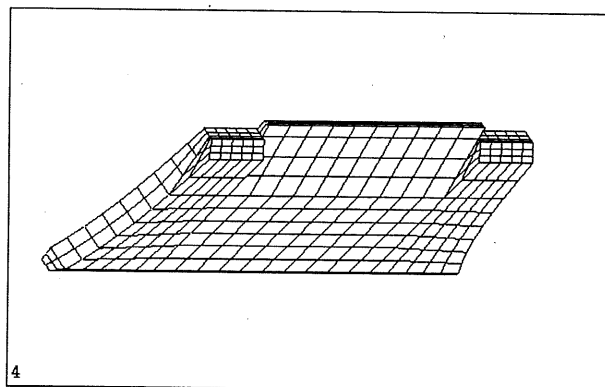
**TABLEAU 5.7. Avant-directrices de Brisay - influence de la masse ajoutée**

Type	No. du mode	Fréquences «in vacuo» (Hz)	Fréquences couplées (Hz)	$\Delta f$ (%)
1	1	73.44	52.04	29.1
	2	144.23	117.84	18.3
	3	196.71	149.73	23.9
2	1	66.85	47.31	29.2
	2	141.29	115.21	18.5
	3	180.29	136.22	24.5
3	1	53.31	36.73	31.1
	2	126.06	101.11	19.8
	3	145.07	106.24	26.8

## 5.6 Avant-directrice de Limestone

### 5.6.1 Description

Il s'agit d'une version modifiée des avant-directrices de la centrale de Limestone.



**Figure 5.11 Avant-directrice de Limestone**

#### Propriétés

$E = 210.0 \text{ GPa}$

$\nu = 0.3$

$\rho_{\text{acier}} = 7830 \text{ kg/m}^3$

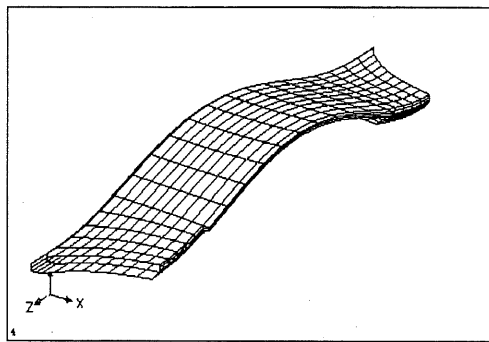
$\rho_{\text{eau}} = 1000 \text{ kg/m}^3$

**Formulation** directe

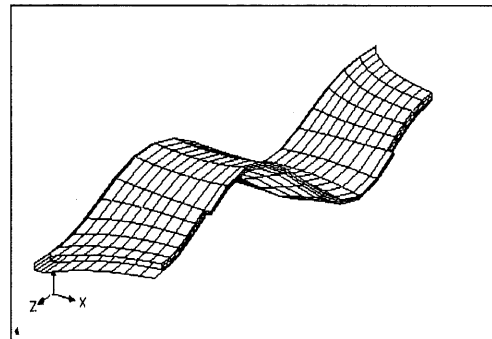
### 5.6.2 Résultats utilisés pour la comparaison

La comparaison des fréquences est montrée au tableau 5.8, alors que la figure 5.12 montre les déformées modales.

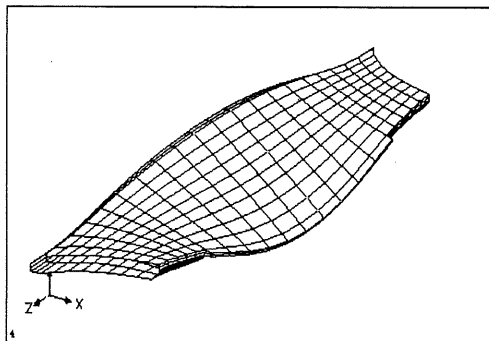
Les résultats utilisés pour la comparaison sont les résultats tirés d'un rapport interne de GE (Grenier, 1991). Ces résultats sont obtenus expérimentalement.



Mode # 1



Mode # 2



Mode # 3

**Figure 5.12** Avant-directrice de Limestone - déformées modales

### 5.6.3 Résultats et commentaires

La première chose à remarquer est que la fréquence dans l'air obtenue avec Nastran pour le premier mode est quand même relativement éloignée de la fréquence expérimentale de

GE. Mais les données fournies sur la géométrie des avant-directrices utilisées par GE lors des essais étaient incomplètes et difficiles à comprendre. Il est donc possible qu'il existe une légère différence entre la réalité et le modèle. On peut cependant comparer les fréquences dans l'eau en tenant compte de l'erreur sur les fréquences dans l'air. On peut voir que la diminution de fréquences obtenue avec «wetfreq» correspond assez bien à celle obtenue expérimentalement. En fait, elle est beaucoup plus près de ce qui a été obtenu expérimentalement que l'estimation de 30% effectuée par GE.

**TABLEAU 5.8. Avant-directrice de Limestone - comparaison des fréquences naturelles (premier mode)**

	Fréquences (Hz)		$\Delta f$ (%)
	air	eau	
GE	45.7	34.57	24.3
Nastran/Wetfreq	50.7	37.49	26.1
Différence relative (%)	10.9	8.4	

## 5.7 Synthèse

Nous avons présenté dans ce chapitre différents résultats qui ont permis de démontrer la validité du logiciel développé. Dans les chapitres suivants, ce logiciel va être utilisé pour réaliser différentes applications.

## CHAPITRE 6 - COUPLAGE ENTRE PLUSIEURS STRUCTURES

Ce chapitre présente le cas de plusieurs structures immergées dans le même fluide et couplées par celui-ci.

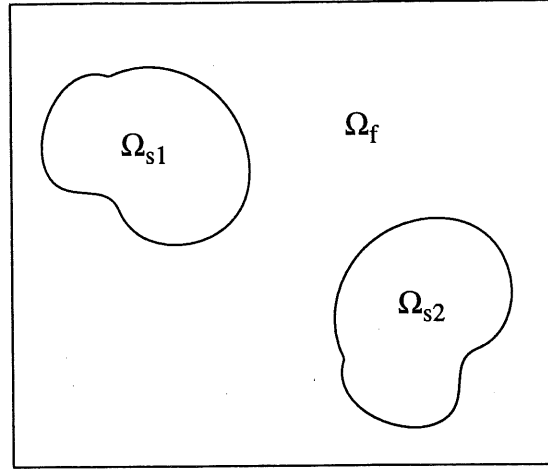


Figure 6.1 Géométrie du problème de couplage

### 6.1 Formulation mathématique

Les hypothèses énoncées au chapitre 3 pour la structure et le fluide s'appliquent également ici. Les équations vont être développées pour un ensemble de 2 structures, mais elles peuvent facilement être généralisées pour un ensemble de  $n$  structures.

Les équations gouvernant ce problème sont les suivantes:

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}_1 + \rho_{s1} \omega_1^2 \underline{u}_1 = 0 \quad \text{dans } \Omega_{s1} \quad (6-1a)$$

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}_2 + \rho_{s2} \omega_2^2 \underline{u}_2 = 0 \quad \text{dans } \Omega_{s2} \quad (6-1b)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_1 \cdot \underline{n}_1 = \underline{F}_1 \quad \text{sur } \Sigma_{s1} \quad (6-2a)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_2 \cdot \underline{n}_2 = \underline{F}_2 \quad \text{sur } \Sigma_{s2} \quad (6-2b)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_1 \cdot \underline{n}_1 = -P \underline{n}_1 \quad \text{sur } \Sigma_{f1} \quad (6-3a)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_2 \cdot \underline{n}_2 = -P \underline{n}_2 \quad \text{sur } \Sigma_{f2} \quad (6-3b)$$

$$\Delta P = 0 \quad \text{dans } \Omega_f \quad (6-4)$$

$$\frac{\partial P}{\partial n_1} = \rho_f \omega_1^2 (\underline{u}_1 \cdot \underline{n}_1) \quad \text{sur } \Sigma_{f1} \quad (6-5a)$$

$$\frac{\partial P}{\partial n_2} = \rho_f \omega_2^2 (\underline{u}_2 \cdot \underline{n}_2) \quad \text{sur } \Sigma_{f2} \quad (6-5b)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \frac{\partial P}{\partial r} \right) = 0 \quad (6-6)$$

On peut voir qu'on retrouve les même équations que pour une structure seule. La seule différence est que ces équations doivent être vérifiées pour les deux structures plutôt que pour une seule. Les indices 1 et 2 réfèrent aux numéros des structures.

En procédant de la même manière qu'à la section 3.4, on obtient le système d'équations couplées suivant (dans le cas d'une structure quelconque):

$$\begin{bmatrix} K - \omega^2 (M + M_o) & C_1 + C_2 \\ (C_1 + C_2)^t & \frac{D_o}{\rho_f \omega^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6-7)$$

avec:

M et K les matrices de masse et de rigidité du système, et F le vecteur de forces externes. Ils sont donnés par:

$$K = \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \quad F = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

Les matrices C1 et C2 sont les matrices de couplage entre le fluide et les structures, la matrice Do est la matrice du fluide incompressible et la matrice Mo est la matrice de masse

du fluide, donnée par l'équation (3-51). Ces matrices sont données par les même équations qu'au chapitre 3, en remplaçant  $\Sigma_f$  par  $(\Sigma_{f1} + \Sigma_{f2})$ . Elles tiennent compte du couplage entre les deux structures.

## 6.2 Description de la méthode

Pour calculer la matrice de masse ajoutée dans le cas de structures multiples, il suffit d'utiliser le programme «bemcplg» pour combiner les maillages des structures et ensuite exécuter «wetfreq» normalement.

Le programme «bemcplg» combine également les vecteurs propres des structures. Cette combinaison est effectuée de la manière suivante: si les fichiers de données contenaient  $n$  et  $m$  vecteurs propres respectivement, le fichier combiné contiendra  $n+m$  vecteurs propres. Ces vecteurs propres sont créés à partir des vecteurs propres des structures seules en ajoutant des zéros. Si la structure 1 possède  $n$  vecteurs propres et la structure 2,  $m$  vecteurs propres, les  $n+m$  vecteurs propres combinés seront constitués des  $n$  vecteurs propres de la structure 1 avec des zéros aux noeuds correspondant à la structure 2 et des  $m$  vecteurs propres de la structure 2 avec des zéros aux noeuds correspondant à la structure 1.

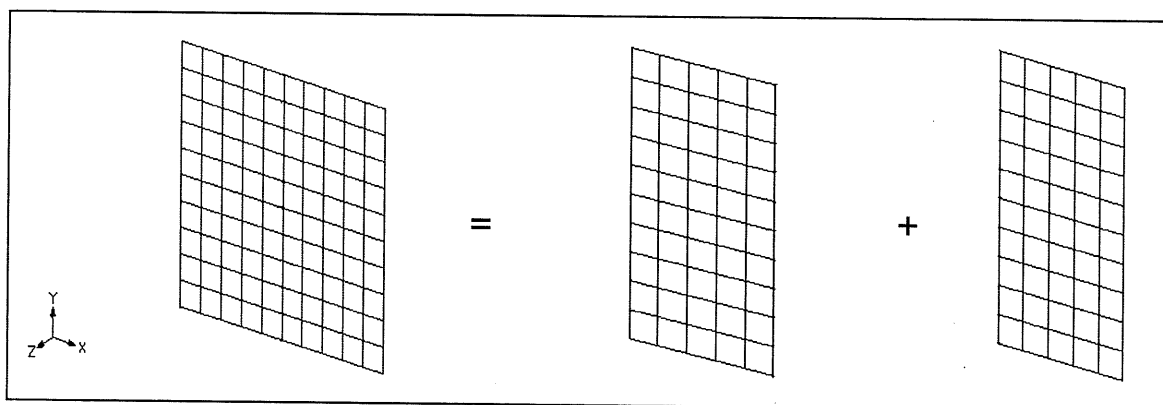
Soit  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  les vecteurs propres des structures 1 et 2, respectivement. Alors,

$$\Phi_{\text{combiné}} = \begin{bmatrix} \Phi_1 & 0 \\ 0 & \Phi_2 \end{bmatrix}$$

## 6.3 Validation

Afin de montrer la validité de la méthode de couplage entre plusieurs structures, une plaque en acier de  $1\text{m}^2$  et de 5 cm d'épaisseur, encastée au centre sur toute la longueur, a été modélisée de deux façons différentes. Dans un premier temps, elle est modélisée complètement en une partie; c'est la méthode habituelle. Dans un deuxième temps, les deux moitiés de la plaque sont modélisées séparément et la méthode de couplage est utilisée pour reformer la plaque complète.

La base modale dans le premier cas est formée de 50 vecteurs propres, alors que dans le second, on a calculé 25 vecteurs propres pour chacune des demi-plaques.



**Figure 6.2 Schéma des plaques**

### 6.3.1 Formulation indirecte

La plaque est modélisée par 10x10 éléments de plaque à 4 noeuds. On peut voir (tableau 6.1) que les résultats obtenus avec les deux méthodes correspondent très bien.

**TABLEAU 6.1 Formulation indirecte - comparaison des fréquences couplées**

No. du mode	Plaque entière (Hz)	Demi-plaques couplées (Hz)	$\Delta f$ (%)
1	137.529	139.119	1.16
2	141.440	141.440	0.00
3	220.477	220.921	0.20
4	221.700	221.700	0.00
5	418.069	418.770	0.17
6	419.655	419.655	0.00
7	781.471	781.846	0.05
8	782.356	782.356	0.00
9	816.205	835.919	2.42
10	856.147	856.147	0.00



### 6.3.2 Formulation directe

La plaque est modélisée par 10x10x1 éléments hexaédriques à 8 noeuds. Notons d'abord que la différence des fréquences «in vacuo» est due à la différence dans le type d'éléments utilisé. Encore une fois, on peut voir (tableau 6.2) que les résultats obtenus avec les deux méthodes correspondent assez bien. L'erreur qu'on retrouve sur certains modes est probablement dû à des erreurs numériques causées par le fait que certains noeuds du maillage couplé sont situés physiquement au même endroit.

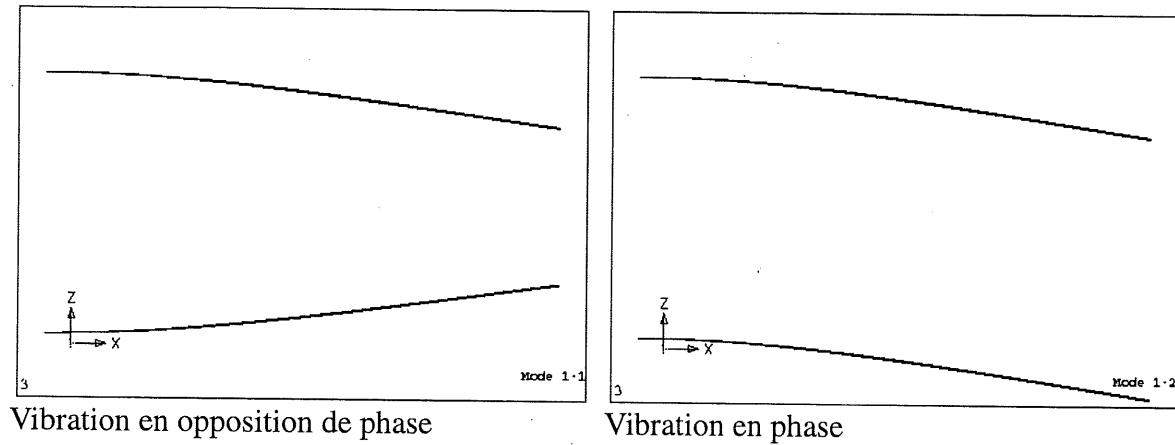
**TABLEAU 6.2 Formulation directe - comparaison des fréquences couplées**

No. du mode	Plaque entière (Hz)	Demi-plaques couplées (Hz)	$\Delta f$ (%)
1	131.267	131.267	0.00
2	135.978	130.508	4.02
3	213.752	213.752	0.00
4	215.351	211.804	1.65
5	409.149	409.149	0.00
6	410.524	407.306	0.78
7	763.685	763.685	0.00
8	764.271	762.386	0.25
9	830.210	830.210	0.00
10	868.746	834.965	3.89

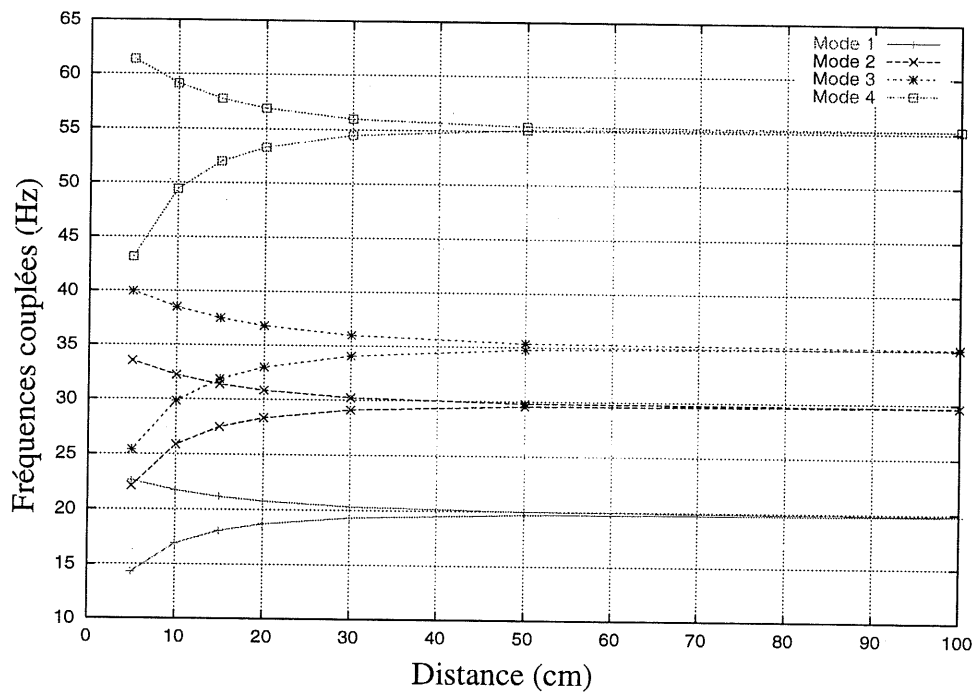
## 6.4 Interaction entre plusieurs plaques

Dans un premier temps, le cas de deux plaques identiques, séparées par une distance  $d$  perpendiculairement à leurs surfaces, a été étudié. Ces plaques mesurent 1mx1mx1cm. L'effet du couplage observé est le suivant: pour chaque fréquence de la plaque seule, on obtient un nombre de fréquences couplées égal au nombre de plaques, i.e. deux dans ce cas-ci. Ces fréquences représentent le même mode de la plaque seule, une diminution par rapport à la fréquence de la plaque seule indiquant que les plaques vibrent en opposition de phase et une augmentation que les plaques vibrent en phase (figure 6.3).

La figure 6.4 montre la variation des fréquences en fonction de la distance entre les plaques. On peut voir que pour une distance  $d$  très grande, les plaques se comportent comme si elles étaient seules dans le fluide. Lorsque cette distance  $d$  diminue, l'effet de couplage entre les plaques apparaît et devient de plus en plus important.

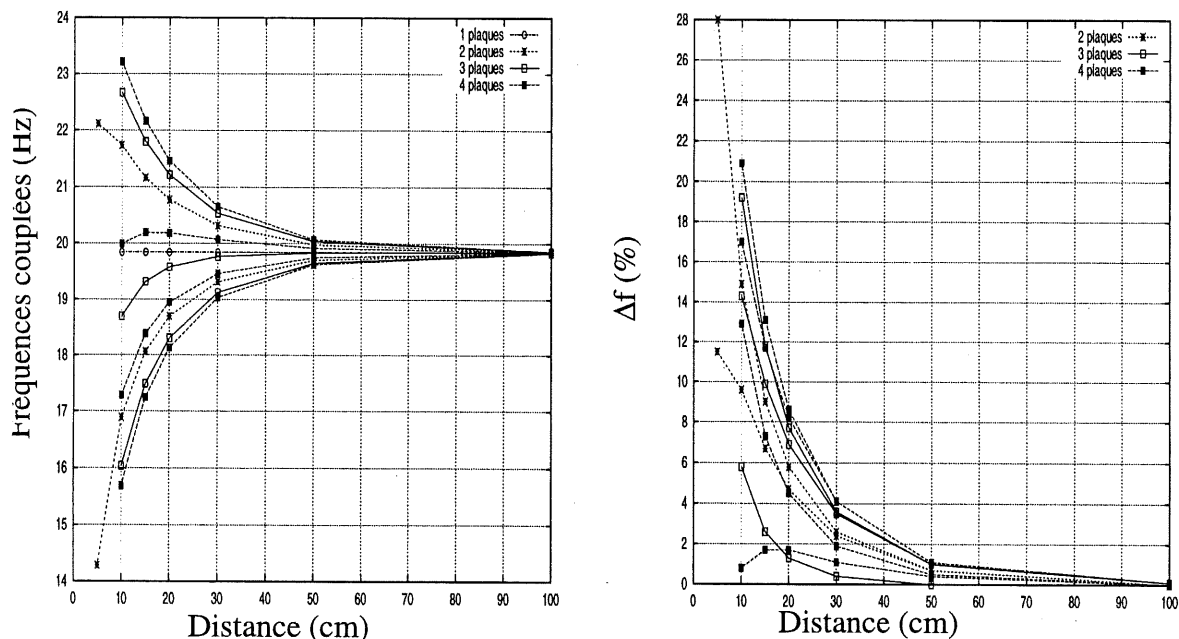


**Figure 6.3 Couplage entre deux plaques - allure du premier mode**



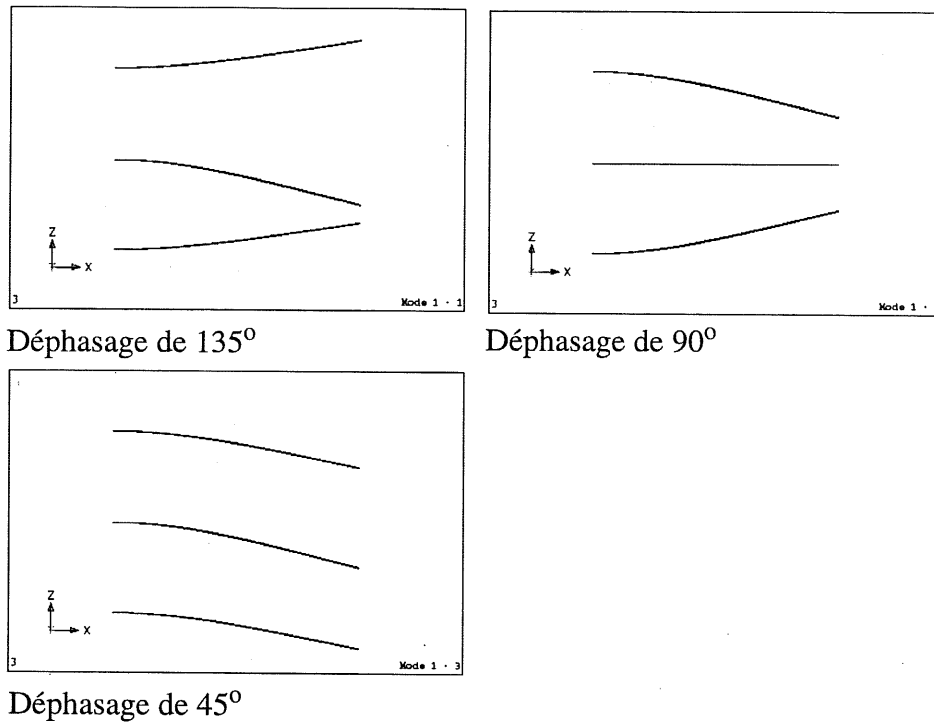
**Figure 6.4 Couplage entre deux plaques - variation des fréquences en fonction de la distance entre les plaques**

Le cas de plusieurs plaques parallèles identiques, chacune séparée des autres par une distance  $d$ , a également été étudié. Ces plaques mesurent  $1\text{m} \times 1\text{m} \times 1\text{cm}$ . L'effet observé est similaire à ce qu'on a pu observer pour deux plaques parallèles; le nombre de fréquences est toujours égal au nombre de plaques. La figure 6.5 montre la variation de ces fréquences en fonction de la distance entre les plaques, pour le premier mode. On peut voir que l'écart entre les fréquences et la fréquence de la plaque seule augmente avec le nombre de plaques dans l'ensemble. On peut également voir que l'influence du couplage entre les plaques demeure faible sur un grand intervalle; la distance doit être relativement faible pour que cette influence devienne importante. Même à une distance de 30 cm (i.e. le tiers de la longueur de la plaque), l'écart maximum est plus petit que 5%.



**Figure 6.5** Couplage entre plusieurs plaques - variation des fréquences en fonction de la distance entre les plaques

Dans le cas d'un ensemble de plus de deux plaques, le déphasage entre chacune des plaques est fonction du nombre de plaques dans l'ensemble. La figure 6.6 montre les différents déphasages pour le premier mode d'un ensemble de 3 plaques.

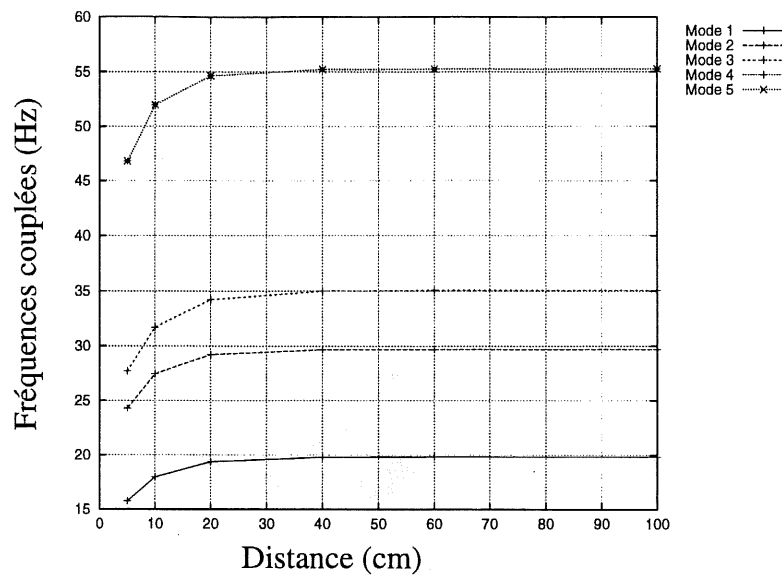


**Figure 6.6 Ensemble de trois plaques - allure du premier mode**

## 6.5 Effet du confinement

Le cas d'une plaque placée entre deux murs a également été étudié. La plaque mesure  $1\text{m}^2$  par  $1\text{cm}$ . Les murs ont été modélisés par des plaques carrées de  $1\text{m}$  et  $4\text{m}$  de côté et de différentes épaisseurs. Il est à noter que les murs ont été modélisés par des plaques plutôt que par des éléments solides parce que «wetfreq» ne permet pas le mélange de la formulation directe et indirecte.

L'effet sur les fréquences naturelles de la structure ont été observés en fonction de la distance entre la plaque et les murs. On a ainsi pu déterminer que l'effet sur la structure est le même quelque soit le type de plaques utilisés pour modéliser les murs. De plus, cet effet demeure faible jusqu'à une petite distance entre la plaque et les murs. Il est donc raisonnable de penser que les effets de bords sur les vibrations des structures dans l'eau vont demeurer faibles dans la plupart des cas. La figure 6.7 montre la variation des fréquences de la plaque en fonction de la distance la séparant des murs.



**Figure 6.7 Variation des fréquences de la plaque en fonction de la distance entre la plaque et les murs**

## 6.6 Synthèse

Dans ce chapitre, nous avons modifié les équations énoncées au chapitre 3 afin de modéliser le cas de plusieurs structures immergées dans le même domaine fluide et couplées par celui-ci. Nous avons également développé une méthode afin de calculer les fréquences naturelles d'un tel ensemble. Cette méthode a été validée pour des cas simples. Elle a ensuite été utilisée pour étudier le comportement d'un ensemble de plusieurs plaques parallèles, ainsi que pour étudier l'effet du confinement.

Dans le chapitre suivant, nous allons présenter les résultats obtenus lors de l'application de la méthode développée à une roue de turbine hydraulique.

## CHAPITRE 7 - APPLICATION À UNE TURBINE HYDRAULIQUE

### 7.1 Description

La roue utilisée est une roue de type Kaplan, à 5 aubes. Elle mesure environ 8 m de diamètre et 5.7 m de hauteur (incluant le cône).

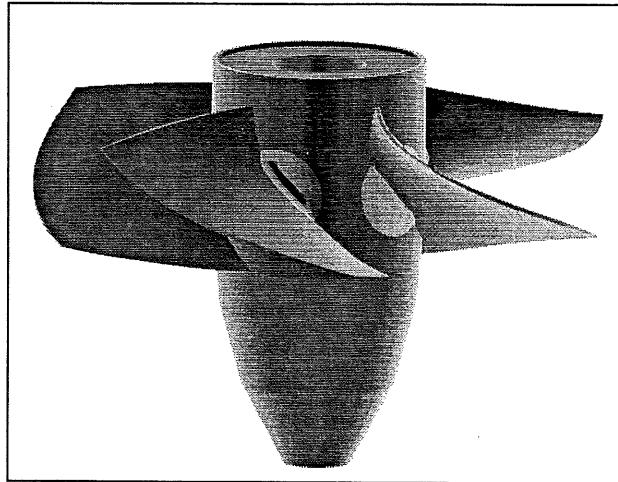


Figure 7.1 Roue d'une turbine hydraulique

### 7.2 Problématique

Un haut niveau de vibrations a été observé en centrale lors de l'opération certains groupes utilisant ce type de roue. Afin de déterminer la cause et les conséquences sur la durée de vie de la structure de ces vibrations, les chercheurs de l'IREQ ont décidé de réaliser une analyse dynamique complète de la structure.

La première partie de cette analyse consiste à déterminer les fréquences naturelles de la structure, afin de voir s'il peut y avoir une coïncidence entre ces fréquences et une excitation connue. La seconde partie consiste à réaliser une analyse des vibrations forcées de la structure afin de se prononcer sur sa durée de vie.

Afin de réaliser ces deux objectifs, les fréquences et les modes de la structure immergée dans l'eau doivent être calculés. C'est l'objectif de ce chapitre.

### 7.3 Modélisation

Le modèle d'une roue a été développé par les chercheurs de l'IREQ avec le logiciel commercial Ideas. Les fréquences et les modes de la structure «in vacuo» ont ensuite été calculés avec les logiciels Ideas et Nastran.

Le moyeu et les aubes sont représentés par des éléments tétraédriques quadratiques, alors que le cône de la roue est représenté par des éléments de plaque linéaires. Il faut également noter que chacune des parties de la roue (moyeu, aubes et cône) sont représentés par un maillage séparé.

Les surfaces mouillées de la structure ont été extraites du maillage complet de la structure avec le logiciel Ideas. Le logiciel «prebem» a ensuite extrait les vecteurs propres correspondant à ce maillage du fichier contenant les vecteurs propres de la structure complète.

On a également utilisé l'option de «prebem» permettant de transformer des éléments triangulaires quadratiques en éléments linéaires.

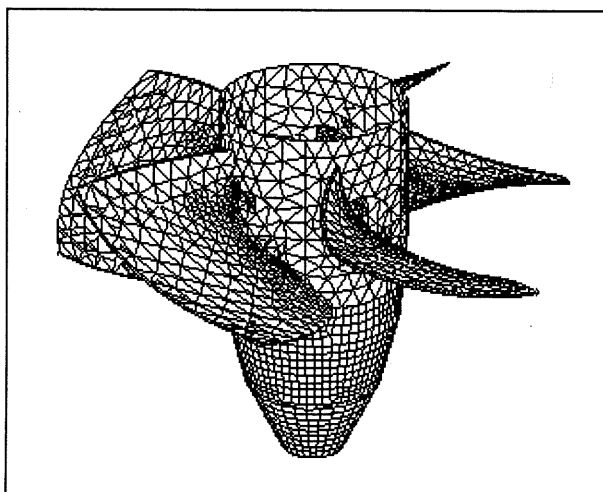


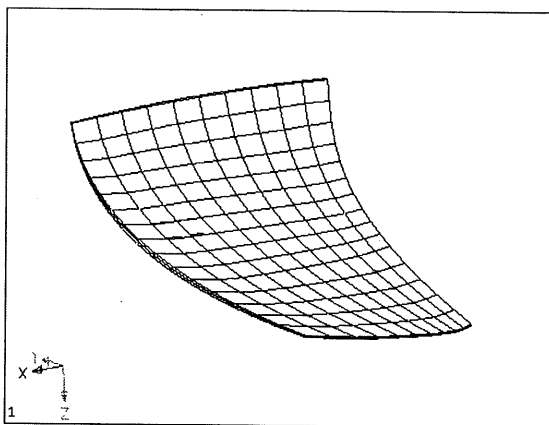
Figure 7.2 Maillage de la roue

## 7.4 Résultats

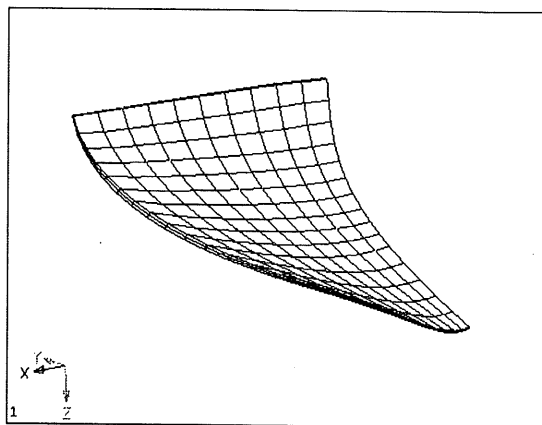
Pour tous les cas qui suivent, la formulation directe en pression a été utilisée. Les fréquences et les modes «in vacuo» ont été calculés avec Nastran, alors que les fréquences et les modes incluant l'effet du fluide ont été calculés avec «wetfreq». La rotation de la structure a été négligée.

### 7.4.1 Modélisation d'une seule aube

Dans un premier temps, les fréquences dans l'eau ont été calculées pour le modèle grossier d'une seule aube, encastrée au niveau du moyeu. La base modale utilisée dans ce cas est composé des 20 premiers modes «in vacuo». On peut voir (tableau 7.1) que l'influence du fluide sur les fréquences naturelles de l'aube est important: la diminution de la première fréquence est de l'ordre de 40%.



Aube non déformée



Déformée modale (premier mode)

Figure 7.3 Aube encastrée

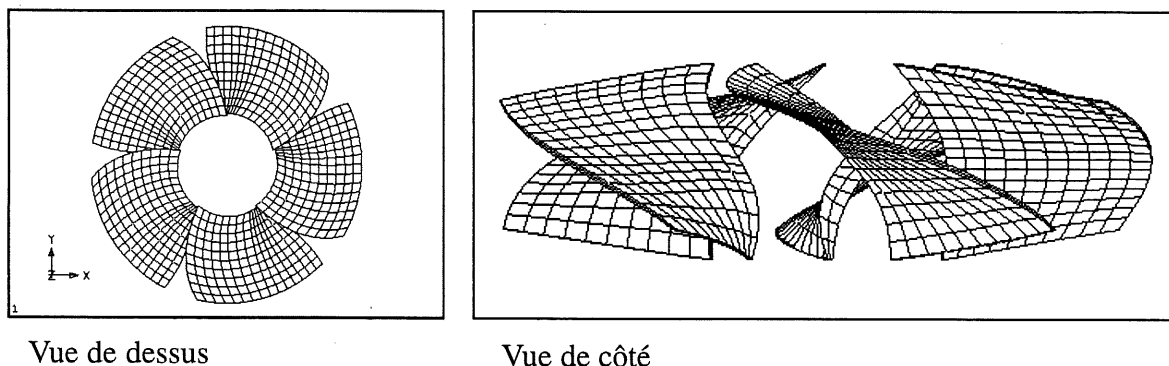
TABLEAU 7.1 Aube encastrée - influence du fluide

No. du mode	Fréquences «in vacuo» (Hz)	Fréquences couplées (Hz)	$\Delta f$ (%)
1	40.194	23.705	41.02
2	73.867	44.768	39.39
3	101.446	62.505	38.39
4	125.134	81.761	34.66
5	134.416	107.140	20.29



### 7.4.2 Modélisation des cinq aubes

Un modèle avec 5 aubes, toutes encastrées au niveau du moyeu, a ensuite été développé. Ce modèle a permis d'observer l'effet de couplage entre les aubes, due uniquement au fait qu'elles sont dans le même volume fluide. On peut voir (tableau 7.2) que ce couplage entre les aubes a seulement un effet très léger sur les fréquences naturelles de la structure.



**Figure 7.4 Cinq aubes encastrées**

**TABLEAU 7.2 Cinq aubes encastrées - influence du fluide**

No. du mode	Fréquences «in vacuo» (Hz)	Fréquences couplées (Hz)				
		famille 1*	famille 2*		famille 3*	
1	40.194	23.747	23.738	23.738	23.610	23.610
2	73.867	44.336	44.630	44.630	45.070	45.070
3	101.446	62.791	62.578	62.578	62.200	62.200
4	125.134	81.633	81.728	81.728	81.826	81.826
5	134.416	107.211	107.149	107.149	107.039	107.039

\* Les différentes familles correspondent à un déphasage temporel entre deux aubes consécutives. La famille 1 correspond à un déphasage de  $0^\circ$ , la famille 2 à un déphasage de  $\pm 72^\circ$  et la famille 3 à un déphasage de  $\pm 144^\circ$ .

### 7.4.3 Roue encastrée

Un modèle complet de la roue, avec le moyeu encastré au niveau du cercle de boulonnage a ensuite été développé. Le cercle de boulonnage est une section circulaire sur le dessus du moyeu; c'est à cet endroit que celui-ci est fixé à l'arbre qui relie la roue à l'alternateur.

Dans un premier temps, ce modèle a été utilisé pour calculer l'influence du fluide sur l'ensemble, en utilisant 20 vecteurs propres «in vacuo» de la structure complète. L'annexe D montre les vecteurs propres en coordonnées modales qui ont servis à classer les modes couplés. Les résultats présentés ici sont les résultats obtenus après ce classement.

On peut voir (tableau 7.3) que l'influence du fluide est importante sur la plupart des modes. On peut cependant remarquer que les modes 8 et 9 ne subissent qu'une influence très faible du fluide. Cela s'explique lorsqu'on regarde la déformée modale de ces modes: ils sont principalement constitués d'un déplacement des aubes dans leur plan. Le déplacement normal à la surface des aubes est très faible, ce qui implique un faible déplacement d'eau et donc une faible influence de la masse ajoutée.

**TABEAU 7.3 Roue encastrée - influence du fluide**

No. du mode	Fréquences «in vacuo» (Hz)	Fréquences couplées (Hz)	$\Delta f$ (%)
1	29.957	16.645	44.44
2	29.957	16.645	44.44
3	32.996	17.418	47.21
4	32.996	17.418	47.21
5	33.362	17.864	46.46
6	40.964	29.413	28.20
7	40.964	29.414	28.19
8	49.492	48.708	1.58
9	49.492	48.705	1.58
10	51.922	46.794	9.88

Ce modèle a ensuite été séparé en trois parties: moyeu, cône et aubes. L'influence du fluide a été calculée de façon indépendante sur chacune de ces parties, puis les matrices de masses ajoutées modales ont été additionnées. La matrice obtenue par cette sommation a finalement été utilisée pour calculer les fréquences et les modes couplés et ces résultats ont été comparés avec les résultats obtenus pour l'ensemble.

On peut voir (tableau 7.4) que les résultats obtenus avec les deux méthodes sont presque identiques. Il est donc possible de calculer l'influence du fluide sur les différentes parties de la roue séparément en obtenant une bonne précision sur les résultats. C'est une possibilité très intéressante car le temps de calcul avec le modèle complet est très important. En traitant les sections de façon indépendante, on peut diminuer ce temps de calcul de façon très significative. Il est cependant à noter qu'on néglige alors le couplage fluide inter-aubes, ce qui est raisonnable pour une roue à cinq aubes.

**TABLEAU 7.4 Roue encastrée - comparaison des deux méthodes**

No. du mode	Fréquences couplées (Hz)		$\Delta f$ (%)
	Méthode 1 - modèle complet	Méthode 2 - addition des matrices de masses modales	
1	16.645	16.683	0.23
2	16.645	16.683	0.23
3	17.418	17.470	0.30
4	17.418	17.470	0.30
5	17.864	17.911	0.26
6	29.413	29.483	0.24
7	29.414	29.484	0.24
8	48.708	48.466	-0.50
9	48.705	48.467	-0.49
10	46.794	48.296	3.21

#### 7.4.4 Modèle complet

Finalement, un modèle complet de la roue et de l'arbre a été développé. Le calcul des modes et des fréquences «in vacuo» est effectué avec le modèle complet (roue et arbre). Le calcul de la masse ajoutée est, quant à lui, effectué uniquement sur la roue, l'arbre n'étant pas en contact avec le fluide.

L'annexe D montre les vecteurs propres en coordonnées modales qui ont servi à classer les modes couplés; les résultats présentés ici sont les résultats obtenus après ce classement.

Encore une fois, on peut voir que l'influence du fluide est importante sur la plupart des modes; les modes de vibrations de la roue (par exemple, les modes #10 et 11) sont toutefois plus influencés que les modes de vibrations de l'arbre (modes #1 et 2, entre autres).

**TABLEAU 7.5 Modèle complet - influence du fluide**

No. du mode	Fréquences «in vacuo» (Hz)	Fréquences couplées (Hz)	$\Delta f$ (%)
1	2.785	2.703	2.95
2	2.785	2.703	2.95
3	7.249	6.161	15.01
4	7.249	6.161	15.02
5	9.070	8.007	11.72
6	9.070	8.007	11.72
7	21.040	16.352	22.28
8	27.497	17.962	34.68
9	27.497	17.961	34.68
10	32.996	17.711	46.32
11	32.996	17.711	46.32
12	33.776	23.319	30.96
13	37.175	30.426	18.15
14	37.175	30.433	18.14

## CONCLUSION

Une méthode de calcul des fréquences et des modes naturels d'une structure complexe immergée dans un fluide lourd a été développée. Cette méthode permet le calcul de la matrice de masse ajoutée pour le cas d'une structure mince en contact avec le fluide sur ses deux faces, ou d'une structure quelconque. Dans les deux cas, les formulations utilisées sont des formulations intégrales variationnelles. Cette méthode inclut une interface avec le logiciel commercial Nastran. Elle a été validée avec différentes structures. Les résultats obtenus sont satisfaisants.

Le phénomène de couplage entre plusieurs structures immergées dans le même volume de fluide a été étudié. Cet effet a pu être décrit dans plusieurs configurations simples, en particulier les cas de plaques parallèles. Dans ce cas, l'effet du couplage augmente avec la diminution de la distance séparant les plaques. Il est également fonction du nombre de plaques présentes dans le domaine fluide.

Cette méthode a ensuite été appliquée au cas d'une roue de turbine hydraulique. On a pu voir que l'effet de l'eau sur cette structure est important. On a également vérifié qu'il était possible de calculer l'influence du fluide séparément sur chacune des sections de la roue et ensuite d'additionner les matrices de masses ajoutées modales afin de calculer les fréquences et les modes couplées, dans le cas d'une roue à cinq aubes. C'est une méthode qui présente un avantage certain puisqu'elle permet de réduire le temps de calcul de façon significative.

Finalement, un certain nombre de points demeurent en suspend, faute de temps nécessaire pour les étudier correctement. Le premier est l'effet de la rotation. En effet, les équations ont été développées pour le cas d'une structure au repos. Mais dans les conditions normales d'opération, la structure est en rotation. Les équations devraient donc être modifiées pour pouvoir en tenir compte.

D'autres points pourraient également être considérés pour améliorer la précision des résultats. Il y a entre autres l'effet du confinement. Les équations supposent que le domaine fluide est infini, ce qui n'est pas exact dans la réalité. Cependant, nous avons montrés par des calculs préliminaires que cet effet est négligeable.

## ANNEXE A - INTERFACE AVEC MSC/XL

Il est possible de visualiser le maillage de surface et les modes couplés de la structure avec le logiciel MSC/XL. Cette annexe décrit les procédures à suivre.

### A.1 Visualisation du maillage de surface

Les étapes à suivre pour visualiser le maillage de surface sont les suivantes:

- Exécution du programme «bem2dat» pour transformer le maillage de surface dans un format pouvant être lu par MSC/XL
- Création d'une nouvelle base de données dans MSC/XL
- Choix des options suivantes dans le menu

Interface With

MSC/Nastran

Read Input File

fichier#.dat

### A.2 Visualisation des modes couplés

La procédure à suivre pour visualiser les modes couplés est la suivante:

- Suivre la procédure pour la visualisation du maillage de surface
- Choisir «RESULTS IMPORT» comme type de résultats et «fichier.ext» comme nom de fichier:

Results Process

Results Table 1

Type ResultsImport

File fichier.ext

- Choisir le numéro de section correspondant au mode désiré (section i = mode i):

Results Process

Deformed

QuickEditRT

...

Deformation

Section 4

Column-X 2

Column-Y 3

Column-Z 4

...

- Si l'on désire obtenir un graphique «contour» plutôt que «deformed», on doit alors spécifier le numéro de section ainsi que la colonne contenant le déplacement qui nous intéresse dans la partie «Grid Contour»:

Results Process

Contour

QuickEditRT

...

Elt. Contour

Section GridResults

Grid Contour

Section 4

Column 3

...



## ANNEXE B - UTILISATION DES PROGRAMMES

### B.1 ADDMASS

#### B.1.1 Appel

addmass nom nb fichier(1) ... fichier(nb) option

Entrée -> nom.vct	Sortie -> nom_tot.cg
fichier(1).mar	nom_tot.ext
...	nom_tot.frc
fichier(nb).mar	nom_tot.mar

#### B.1.2 Fonction

Ce programme additionne des matrices de masses ajoutées modales et calcule les fréquences et les modes couplés résultants. Seuls les deux premiers paramètres sont obligatoires.

Le paramètre «nb» indique le nombre de matrices de masses ajoutées modales à additionner. Les noms des fichiers contenant ces matrices sont optionnels. S'ils sont omis, ils sont obtenus en ajoutant les indices «1», «2» et ainsi de suite à «nom».

Le paramètre «option» précise la tâche à effectuer. La valeur option = 0 est utilisée par défaut.

Option = 0 -> addition des matrices de masses ajoutées modales et calcul des fréquences couplés

Option = 1 -> addition des matrices de masses ajoutées modales uniquement

Option = 2 -> même chose que option = 0, mais les noms des fichiers de sortie sont donnés par «nom.\*» au lieu de «nom\_tot.\*»

Option = 10-> addition des matrices de masses ajoutées modales et calcul des fréquences et des modes couplés

Option = 12-> même chose que option = 10, mais les noms de fichiers de sortie sont donnés par «nom.\*» au lieu de «nom\_tot.\*»

#### B.1.3 Particularités

Ce programme possède les particularités suivantes:

- Les matrices de masses modales doivent être de même dimensions et correspondre aux fréquences et aux vecteurs propres «in vacuo» fournis;
- Les matrices de masses modales doivent être dans le format «Direct Matrix Input» (DMI) de Nastran;
- Les fréquences et les modes couplés sont classés pour correspondre aux modes «in vacuo» avant d'être sauvegardés.

## B.2 BEM2DAT

### B.2.1 Appel

bem2dat fichier

Entrée -> fichier.bem

Sortie -> fichier#.dat

### B.2.2 Fonction

Ce programme transforme le maillage de surface obtenu par «prebem» dans un format pouvant être lu par MSC/XL.

## B.3 BEMCPLG

### B.3.1 Appel

bemcplg nom fichier1 fichier2 option

Entrée -> fichier1.bem

Sortie -> nom.bem

fichier1.vct

nom.vct

fichier2.bem

fichier2.vct

nom.d

### B.3.2 Fonction

Ce programme combine deux maillages afin de calculer le couplage entre deux structures. Les trois derniers paramètres sont optionnels. S'il sont omis, «fichier1» et «fichier2» sont obtenus en ajoutant les indices «1» et «2» à «nom». Finalement, le paramètre «option» indique si les vecteurs propres des deux maillages correspondent aux mêmes modes (option = 1) ou à des modes différents (option = 0). C'est cette dernière valeur qui est utilisée par défaut.

### B.3.3 Particularités

Ce programme possède les particularités suivantes:

- Le programme n'effectue aucune vérification sur les maillages. Le maillage combiné peut donc contenir deux fois le même noeud;
- La distance entre les structures est déterminée par leur position relative; on peut également imposer une translation et une rotation de la structure #2 avec le fichier «fichier.d». Toutes les rotations sont effectuées par rapport à la position initiale de la structure.

Contenu du fichier :  $\Delta x$   $\Theta x$   
 $\Delta y$   $\Theta y$   
 $\Delta z$   $\Theta z$

$\Delta x$ ,  $\Delta y$  et  $\Delta z$  sont les translations selon les axes X, Y et Z.  $\Theta x$ ,  $\Theta y$  et  $\Theta z$  sont les rotations autour des axes OX, OY et OZ (en degré).

- Dans le cas où l'on impose une rotation à la structure #2, la même rotation est imposée à ses vecteurs propres de façon à ce qu'ils demeurent consistents.
- Si les fichiers d'entrée correspondent à la formulation quelconque, le programme ajoute une condition limite sur la pression pour le premier noeud de la structure #2.

## B.4 PREBEM

### B.4.1 Appel

prebem fichierDAT fichierF06 type option

Entrée -> fichier.dat	Sortie -> fichier.bem
fichier.f06	fichier.vct

### B.4.2 Fonction

Ce programme permet d'extraire le maillage de la surface mouillée d'un maillage quelconque. Les trois derniers paramètres sont optionnels. Si «fichierF06» est omis, la valeur de «fichierDAT» est utilisée.

Selon la valeur fournie sur la ligne de commande pour le type d'éléments à traiter, le programme considère tous les éléments du maillage (type = 1), seulement les éléments de plaque (type = 2) ou seulement les éléments solides (type = 3). Si aucune valeur n'est fournie, tous les éléments du maillage sont considérés.

Finalement, la valeur fournie pour le paramètre «option» détermine si les éléments triangulaires quadratiques sont laissés comme tel (option = 1) ou bien transformés en éléments linéaires (option = 0). C'est cette dernière valeur qui est utilisée par défaut.

### B.4.3 Particularités

Le programme possède les particularités suivantes:

- Si le fichier «fichier.dat» contient une série de contraintes (SPC) portant le numéro 777, le programme sauve le numéro des noeuds spécifiés dans cette série de contraintes dans le fichier «fichier.bem». Cette option permet de spécifier les noeuds où l'on doit définir une pression nulle lorsque le maillage est composé de plusieurs structures séparées (section 4.3.1);

- Si le fichier «fichier.dat» contient une série de contraintes (SPC) portant le numéro 888, le programme enlève les éléments du maillage dont tous les noeuds sont spécifiés dans la série de contraintes. Cette option permet d'enlever les surfaces qui ne correspondent pas à des surfaces mouillées;
- Si le fichier «fichier.dat» contient une série de contraintes (SPC) portant le numéro 999, le programme sauve le numéro des noeuds spécifiés dans cette série de contraintes dans le fichier «fichier.bem». Cette option permet de spécifier les endroits où le saut de pression est nul lors du calcul de la masse ajoutée avec la formulation pour une structure mince (section 4.3.1);
- Seules les valeurs des déplacements (u, v, w) des vecteurs propres sont sauvegardées dans le fichier «fichier.vct»;
- Le maillage peut être composé d'éléments linéaires ou quadratiques ou d'une combinaison des deux;
- Le programme traite les éléments de types CHEXA, CPENTA, CTETRA, CQUAD4, CQUAD8, CTRIA3 et CTRIA6. Le maillage peut être composé d'un ou de plusieurs types d'éléments.

## B.5 WETFREQ

### B.5.1 Appel

wetfreq fichier

Entrée -> fichier.bem  
fichier.vct

Sortie -> fichier.frc  
fichier.ext  
fichier.mar  
fichier.c  
fichier.mo  
fichier.ma  
fichier.cg

Le paramètre sur la ligne de commande est optionnel; qu'il soit présent ou non, lorsqu'on exécute le programme, un menu apparaît (figure B.1). Les différentes options sont les suivantes:

- L'option 1 permet de spécifier le fichier à utiliser.
- L'option 2 permet de modifier la valeur de la masse volumique de l'eau. Cette masse doit être consistante avec le système d'unités utilisé pour la structure.
- L'option 3 permet de spécifier le type de projection à effectuer pendant les calculs. Les différentes valeurs possibles sont «Aucune», «C1 et C2» et «C1, C2 et Mo». La méthode utilisée par défaut est la méthode 2 (C1 et C2).

Menu de WETFREQ		
-----		
1. Nom du fichier	:	<null>
2. Densite du fluide	rho:	1000.00 kg/m^3
3. Projection	:	C1 et C2
4. Validation C+ et aire	:	T
5. Validation M10	:	F
6. Masse ajoutee totale	:	F
7. Calcul a effectuer	:	Mar et Frc
-----		
Entrez «i» pour changer le i-eme item, «0» pas de changement, «66» pour sortir		
-----		
Entrez votre choix: i =		

**Figure B.1 Menu de «wetfreq»**

- Les options 4, 5 et 6 permettent de valider les valeurs obtenues à différentes étapes du calcul.

Les options 4 et 5 s'utilisent dans le cas de la formulation quelconque uniquement. Elles permettent respectivement de calculer la valeur de l'aire de la surface mouillée et de C+, et de la somme des termes de la matrice de masse du fluide ( $M_0$ ). Les résultats sont sauvegardés dans les fichiers «fichier.c» et «fichier.mo», respectivement. L'option 6 permet d'effectuer le calcul de la masse ajoutée totale. Les résultats sont sauvegardés dans le fichier «fichier.ma».

- L'option 7 permet de spécifier les calculs à effectuer. Les différentes valeurs possibles sont «Tests seulement», «Mar», «Mar et Frc» et «Mar, Frc et Ext».

«Tests seulement» indique qu'uniquement les validations spécifiées (option 4, 5 et 6) sont exécutées. «Mar», «Frc» et «Ext» font quant à eux références aux fichiers de sortie portant cette extension, i.e. respectivement le fichier contenant la matrice de masses ajoutées modales, celui contenant les fréquences couplées et celui contenant les modes couplés. Il est ainsi possible de choisir les fichiers de sortie désirés.

### B.5.2 Particularités

Ce programme possède les particularités suivantes:

- Les validations (option 4, 5 et 6) peuvent être effectuées sans que des vecteurs propres («fichier.vct») soient spécifiés. Si le fichier «fichier.vct» n'existe pas, le programme exécute comme si l'option 7 était vrai;
- Les fréquences et les modes couplés sont classés pour correspondre aux modes «in vacuo» avant d'être sauvegardés.

## ANNEXE C - FORMAT DES FICHIERS

Cette annexe présente les formats des différents fichiers utilisés lors du calcul des fréquences d'une structure immergée dans un fluide.

### C.1 Fichier de données de Nastran

Le fichier «fichier.dat» contient le maillage de la structure pour le calcul des fréquences et des modes «in vacuo». Le format est celui des fichiers de données de MSC/Nastran.

Le fichier «fichier.f06» contient les fréquences et les vecteurs propres de la structure «in vacuo». Le format est celui des fichiers de sortie de MSC/Nastran.

### C.2 Fichiers créés par «prebem»

#### C.2.1 «fichier.bem»

Ce fichier contient le maillage de la surface mouillée de la structure.

Section 1 : Dimensions	→	Nn Nquad Ntria Nnequad Nnetria Nspc1 Nspc2
Section 2 : Coordonnées	→	X(1) Y(1) Z(1) X(2) Y(2) Z(2) ... X(Nn) Y(Nn) Z(Nn)
Section 3 : Connectivité des éléments quadrangles	→	IenQ(1, 1) ... IenQ(1, Nnequad) ... IenQ(Nquad, 1) ... IenQ(Nquad, Nnequad)
Section 4 : Connectivité des éléments triangulaires	→	IenT(1, 1) ... IenT(1, Nnetria) ... IenT(Ntria, 1) ... IenT(Ntria, Nnetria)
Section 5 : Contraintes sur la pression	→	Spc(1) ... Spc(Nspc1 ou Nspc2)

Les différentes sections doivent être dans l'ordre énoncé ici. De plus, aucune ligne blanche ni aucune ligne de commentaires ne peuvent être insérés à l'intérieur d'une section ou entre deux sections.

- Section 1 : Dimensions

Nn	nombre de noeuds dans le maillage
Nquad	nombre d'éléments quadrangles
Ntria	nombre d'éléments triangulaires
Nnequad	nombre de noeuds par éléments quadrangles
Nnetria	nombre de noeuds par éléments triangulaires
Nspc1	nombre de noeuds spécifiés dans la série de contraintes 999
Nspc2	nombre de noeuds spécifiés dans la série de contraintes 777

Les éléments de cette section sont séparés par des espaces et peuvent être disposés sur plus d'une ligne.

- Section 2 : Coordonnées

X(i), Y(i), Z(i)      coordonnées du noeud i

Les éléments de cette section sont disposés de façon à ce qu'on ait les coordonnées d'un noeud par ligne. Les valeurs sur une ligne sont séparées par des espaces.

- Section 3 : Connectivité des éléments quadrangles

IenQ(i, \*)      connectivité de l'élément quadrangle i

Les éléments de cette section sont disposés de façon à ce qu'on ait la connectivité d'un élément par ligne. Les valeurs sur une ligne sont séparées par des espaces.

- Section 4 : Connectivité des éléments triangulaires

IenT(i, \*)      connectivité de l'élément triangulaire i

Les mêmes remarques que pour la section 3 s'applique ici.

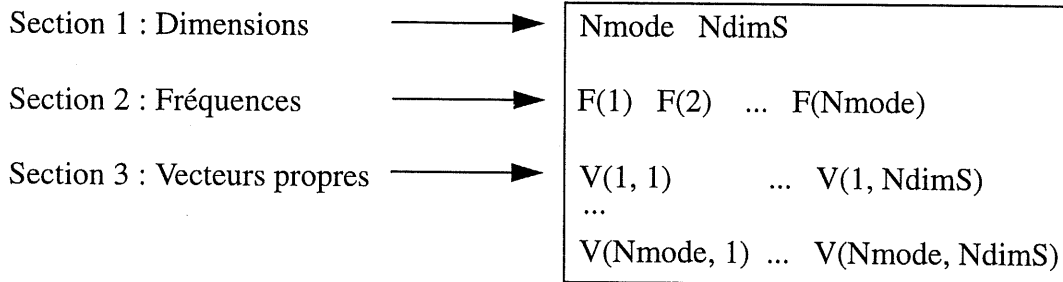
- Section 5 : Contraintes sur la pression

SpC(i)      numéro du ième noeud spécifié dans la série de contraintes 999 ou 777, selon le cas (voir section B.4.3)

Les éléments de cette section sont disposés de façon à avoir le numéro d'un noeud par ligne.

### C.2.2 «fichier.vct»

Ce fichier contient les fréquences et les vecteurs propres de la structure «in vacuo». Les différentes sections doivent être dans l'ordre énoncé ici. De plus, aucune ligne blanche ni aucune ligne de commentaires ne peuvent être insérés à l'intérieur d'une section ou entre deux sections.



- Section 1 : Dimensions

Nmode      nombre de modes calculés pour la structure «in vacuo»

NdimS      dimension des vecteurs propres (3 x nombre de noeuds)

- Section 2 : Fréquences

F(i)      fréquence i de la structure «in vacuo»

Les éléments de cette section sont séparés par des espaces et peuvent être disposés sur plus d'une ligne.

- Section 3 : Vecteurs propres

V(i, \*)    vecteur propre i de la structure «in vacuo»

Les valeurs des différents déplacements pour un vecteur propre sont séparées par des espaces et peuvent être disposées sur plus d'une ligne. Mais on doit changer de ligne entre chaque vecteur propre de façon à ce qu'on ne retrouve pas deux vecteurs propres sur la même ligne.



### C.3 Fichiers de sortie de «wetfreq»

#### C.3.1 «fichier.cg»

Ce fichier contient les vecteurs propres en coordonnées modales ( $u_m$ ) obtenus lors de la résolution de l'équation (3-57).

```
-----  
Vecteur i : Mode j  
-----  
Vect(1, i) ... Vect(Nmode, i)  
...
```

avec

i            le numéro du vecteur propre courant  
j            le numéro du mode «in vacuo» correspondant  
Vect(:, i) le vecteur propre en coordonnées modales courant

#### C.3.2 «fichier.ext»

Ce fichier contient les vecteurs propres de la structure immergée. Il est formaté de façon à pouvoir être lu par MSC/XL.

#### C.3.3 «fichier.frc»

Ce fichier contient les fréquences «in vacuo» et couplés de la structure.

```
=====
```

mode #	Frequence in vacuo (Hz)	Frequence couplee (Hz)	Df (%)
...			
i	Fv(i)	Fc(i)	D(i)
...			

```
=====
```

avec:

- i le numéro du mode courant
- Fv(i) la fréquence «in vacuo» du mode courant
- Fc(i) la fréquence couplée du mode courant
- D(i) la différence relative entre la fréquence «in vacuo» et la fréquence couplée

#### C.3.4 «fichier.mar»

Ce fichier contient la matrice de masse ajoutée réduite dans le format «Direct Matrix Input» de Nastran. Le «large field format» (champs de 16 caractères) est utilisé.

### C.4 Fichiers contenant les valeurs de contrôle

#### C.4.1 «fichier.mo»

Ce fichier contient la valeur de la somme des termes de la matrice Mo, multipliée par 4π. Il est utilisé pour la validation du calcul de la matrice de masse du fluide. Lorsque la matrice Mo est évaluée sur un carré de référence, on doit obtenir la valeur analytique de la double intégrale de 1/R.

$$I = \int_{S_x} \int_{S_y} \frac{1}{R} dS_y dS_x = 23,785677$$

$$M_o = \int_{S_x} \int_{S_y} \rho_f \underline{u}(\underline{y}) \cdot \underline{n}_y \left( \frac{1}{4\pi R} \right) \underline{n}_x \cdot \underline{u}(\underline{x}) dS_y dS_x$$

#### C.4.2 «fichier.c»

Ce fichier contient les valeurs de l'aire de la surface mouillée et du terme de contrôle C+. Il est utilisé pour la validation de la deuxième matrice de couplage (C2). La valeur théorique de C+ est donnée par  $C+ = -\frac{1}{2}A$  pour une structure fermée avec une normale externe.

Aire C+
---------

avec:

Aire l'aire de la surface mouillée  
C+ la valeur du terme de contrôle

### C.4.3 «fichier.ma»

Ce fichier contient la valeur de la masse ajoutée totale ainsi que celles de la masse ajoutée selon les trois axes.

$M_x$ $M_y$ $M_z$ $M_{totale}$
--------------------------------

avec:

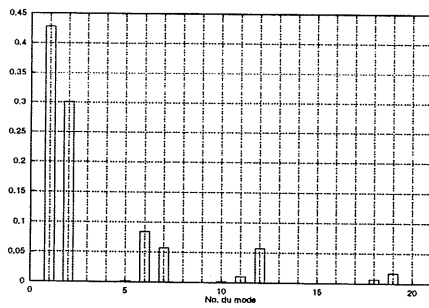
$M_x$  la masse ajoutée selon l'axe x  
 $M_y$  la masse ajoutée selon l'axe y  
 $M_z$  la masse ajoutée selon l'axe z  
 $M_{totale}$  la masse ajoutée totale

## ANNEXE D - VECTEURS PROPRES EN COORDONNÉES MODALES

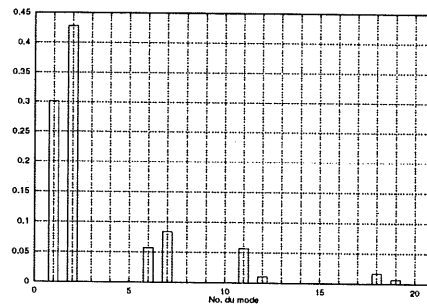
Cette annexe présente les vecteurs propres en coordonnées modales ( $u_m$ ) qui ont servi à réordonner les modes couplés dans le cas de la roue de la turbine hydraulique. Les graphiques montrent, pour chaque coordonnée modale couplée  $u_m$ , la contribution des différents modes «in vacuo».

### D.1 Roue encastrée

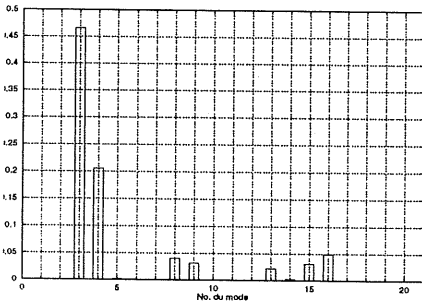
Dans ce cas, seuls les vecteurs propres correspondant aux dix premiers modes «in vacuo» sont montrés.



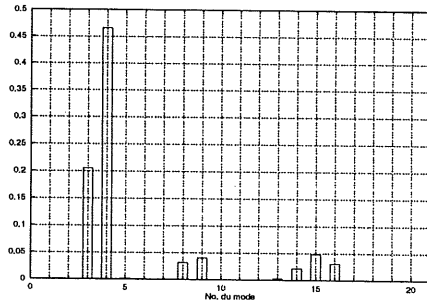
Mode # 1 :  $u_m(2)$



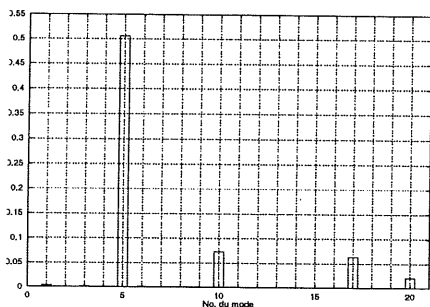
Mode # 2 :  $u_m(1)$



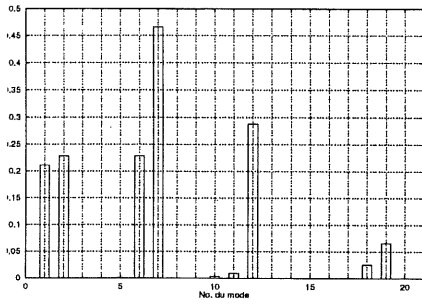
Mode # 3 :  $u_m(3)$



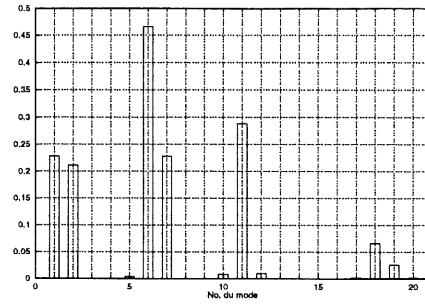
Mode # 4 :  $u_m(4)$



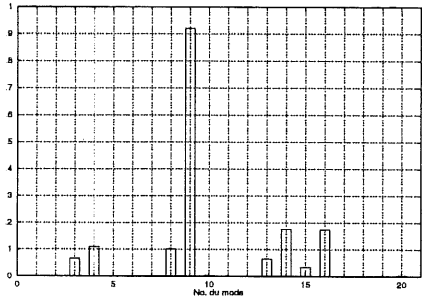
Mode # 5 :  $u_m(5)$



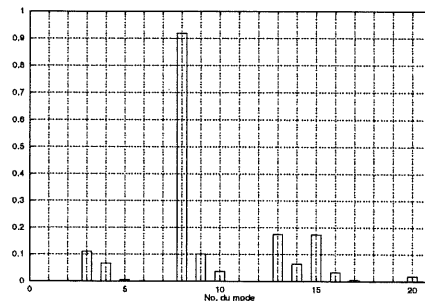
Mode # 6 :  $u_m(7)$



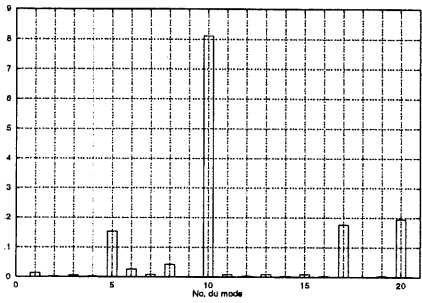
Mode # 7 :  $u_m(6)$



Mode # 8 :  $u_m(17)$



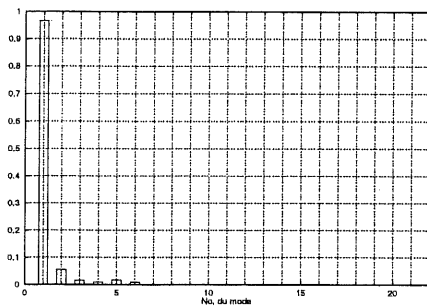
Mode # 9 :  $u_m(16)$



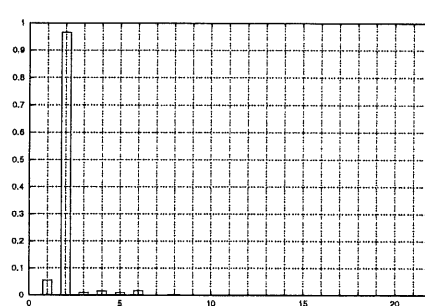
Mode # 10 :  $u_m(15)$

## D.2 Modèle complet

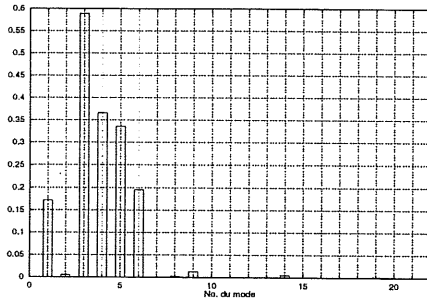
Dans ce cas, les vecteurs propres correspondant aux 14 premiers modes «in vacuo» sont montrés.



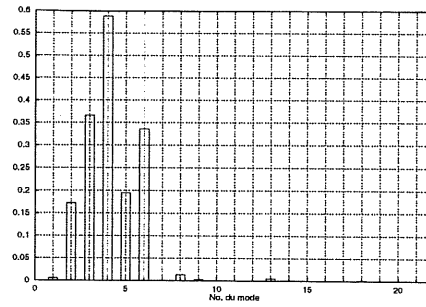
Mode # 1 :  $u_m(1)$



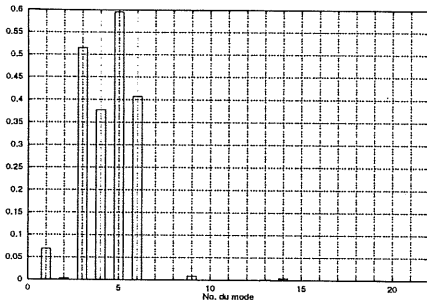
Mode # 2 :  $u_m(2)$



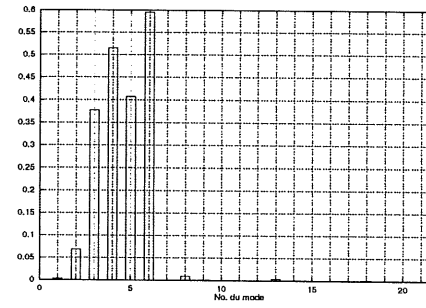
Mode # 3 :  $u_m(3)$



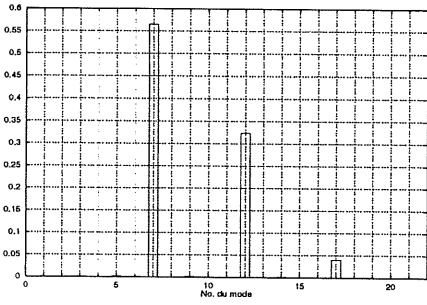
Mode # 4 :  $u_m(4)$



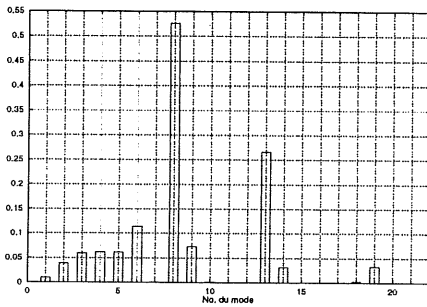
Mode # 5 :  $u_m(5)$



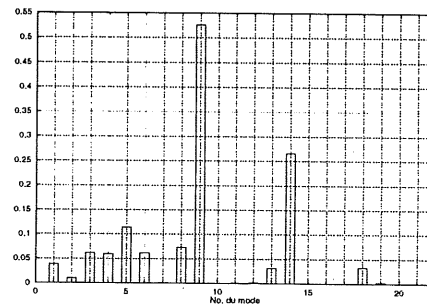
Mode # 6 :  $u_m(6)$



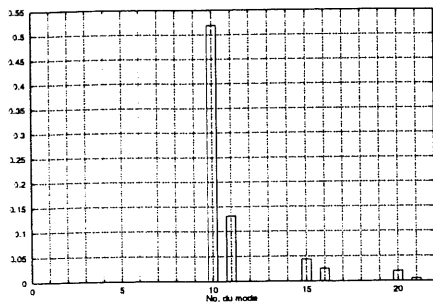
Mode # 7 :  $u_m(7)$



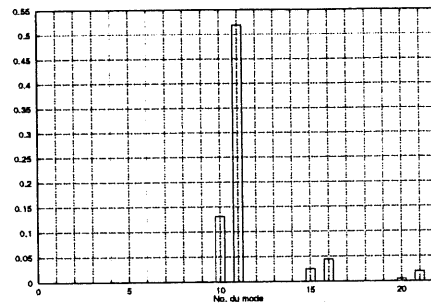
Mode # 8 :  $u_m(9)$



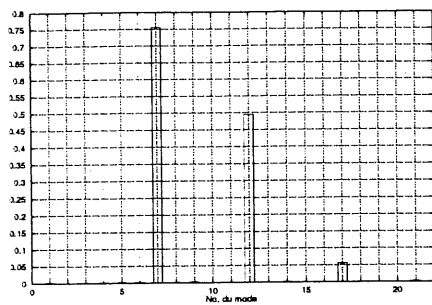
Mode # 9 :  $u_m(8)$



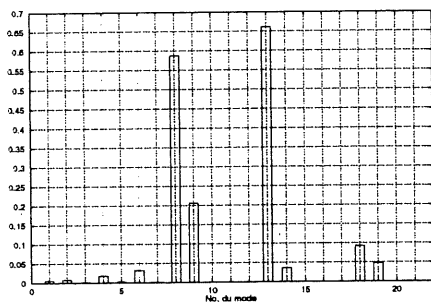
Mode # 10 :  $u_m(10)$



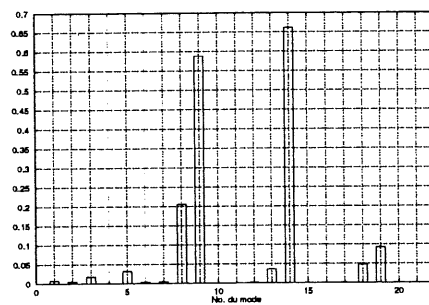
Mode # 11 :  $u_m(11)$



Mode # 12 :  $u_m(12)$



Mode # 13 :  $u_m(13)$



Mode # 14 :  $u_m(14)$

## BIBLIOGRAPHIE

- ATALLA, N. (1997a) *Méthodes numériques en interaction fluide-structure*, Notes de cours GMC 722, Dép. de génie mécanique, Université de Sherbrooke, Qc, Canada
- ATALLA, N. (1997b) *Formulation symétrique par équations intégrales des problèmes de couplage fluide-structure*, GAUS, rapport interne
- BATHE, K.J. (1982) *Finite element procedures in engineering analysis*, Prentice Hall, New Jersey, 735 pages
- BAYLISS, A., GUNZBURGER, M., TURKEL, F. (1979) *Boundary conditions for the numerical solution of elliptic equations in exterior regions*, ICASE Report, No. 80-1, NASA
- BETTESS, P. (1977) *Infinite element*, Int. J. Num. Meth. Eng., vol. 11, p. 53-64
- BURTON, A.J., MILLER, G.F. (1971) *The application of integral equation methods to the numerical solution of some exterior boundary value problems*, Proceedings of the royal society of London, série A323, p. 201-210
- CHEN, L.H., SCHWEIKERT D.G. (1963) *Sound radiation from an arbitrary body*, J. Acoust. Soc. Am., vol. 35, p. 1626-1632
- CHERTOCH, G. (1964) *Sound radiation from vibrating surfaces*, J. Acoust. Soc. Am., vol. 36, p. 1305-1313
- COPLEY, L.G. (1968) *Fundamental results concerning integral representation in acoustic radiation*, J. Acoust. Soc. Am., vol. 44(1), p. 28-32
- DING, H.J., CHEN, W.Q. (1996) *Natural frequencies of an elastic spherically isotropic hollow sphere submerged in a compressible fluid medium*, J. Sound and Vibration, vol. 192(1), p.173-198
- FILIPPI, P.J.T. (1977) *Layer potentials and acoustic*, J. Acoust. Soc. Am., vol. 54, p. 473-500
- GIROIRE, J., NEDELEC, J.C. (1978) *Numerical solution of an exterior Neumann problem using a double layer potential*, Math. Comp., vol. 32, p. 973-990
- GLADWELL, G.M.L. (1966) *A variational formulation of damped acousto-structural vibration problems*, J. Sound Vib., vol. 4(2), p. 172-186
- GRENIER, R. (1991) *Calcul des fréquences de Von Karman et des fréquences naturelles - Avant-directrices Brisay*, Rapport interne GE Canada



- HAMDI, M.A. (1981) *Une formulation variationnelle par équations intégrales pour la résolution de l'équation de Helmholtz avec des conditions aux limites mixtes*, C.R. Acad. Sc. Paris, Ser. II, vol. 292, p. 17-20
- HAN, Ray P.S., Xu, H. (nov. 1996) *Simple and accurate added mass model for hydrodynamic fluid-structure interaction analysis*, Journal of the Franklin Institute, vol. 333b, no. 6, p. 929-945
- IRONS, B.M. (1970) *The role of part inversion in fluid-structure problems with variables*, AIAA Journal, vol. 7, p. 568
- JEANS, R.A., MATHEWS, I.C. (1993) *A unique coupled boundary element/finite element method for the elastoacoustic analysis of fluid-filled thin shells*, J. Acoust. Soc. Am., vol. 96(6), p. 3473-3479
- LACHAT, J.C., WATSON, J.O. (1976) *Effective numerical treatment of boundary integral equation: a formulation for three-dimensional elastostatics*, Int. J. Num. Meth. Eng., vol. 10, p. 991-1005
- OLSON, L.G. & BATHE, K.L. (1985) *Analysis of fluid-structure interactions. A direct symmetric coupled formulation based on the fluid velocity potential*. Computers & Structures, vol. 21, no. 1/2, p. 21-32
- PIERCE, A.D., WU, X.F. (1983) *Variational method for prediction of acoustic radiation from vibrating bodies*, J. Acoust. Soc. Am., suppl. 1, vol. 74, S107
- RAMACHANDRAN, J. (1979) *Non-linear vibrations of cylindrical shells of varying thickness in an incompressible fluid*, J. of Sound and Vibration, vol. 64, p. 97-106
- REYMOND, M., MILLER, M. (1994) *MSC/NASTRAN Quick Reference Guide*, The MacNeal-Schwendler Corporation
- SCHENCK, H.A. (1968) *Improved integral formulation for acoustic problems*, J. Acoust. Soc. Am., vol. 44, p. 41-58
- SELMANE, A., LAKIS, A.A. (1997) *Vibration analysis of anisotropic open cylindrical shells subjected to a flowing fluid*, J. of Fluids and Structure, vol. 11, p. 111-134
- SGARD, F. (1995) *Étude numérique du comportement vibro-acoustique d'un système plaque-cavité dans un écoulement uniforme, pour différents types d'excitation*, Thèse de doctorat, Université de Sherbrooke, Sherbrooke, Canada
- STALLYBRASS, M.P. (1967) *On a pointwise variational principle for the approximate solution of linear boundary value problems*, J. of Mathematics and Mechanics, vol. 16, no. 11, p. 1247-1286
- SUNDQVIST, J. (1983) *An application of Adina to the solution of fluid-structure interaction problems*. Computers & Structures, vol. 17, no. 5-6, p. 793-807

- UNGLESS, R.L. (1973) *An infinite finite element*, M.A.Sc. Thesis, University of British Columbia
- WANG, W., ATALLA, N. (1997) *A numerical algorithm for double surface integrals over quadrilaterals with a  $1/R$  singularity*, Communications in Numerical Methods in Engineering, vol. 13, p. 858-890
- ZIENKIEWICZ, O.C., KELLY, D.W., BETTESS, P. (1977) *The coupling of the finite element method and boundary solution procedures*, Int. J. Num. Meth. Eng., vol. 11, p. 355-375
- ZIENKIEWICZ, O.C., NEWTON, R.E. (1969) *Coupled vibrations of a structure submerged in a compressible fluid*, Proc. Symp. Finite Element Techniques, University of Stuttgart, Germany